Escuela de Ingeniería
Técnica de Telecomunicación

CALCULADORES ANALOGICOS

METODOS DE PROGRAMACION

D. F. Sáez Vacas

Doctor Ingeniero de Telecomunicación

Profesor de la Asignatura de Ordenadores Electrónicos

1969
MADRID

I N D I C E

Capitulo 6 : CAMBIOS DE ESCALA EN AMPLITUD Y EN TIEMPO

Capítulo 7 : MULTIPLICACION Y GENERACION DE FUNCIONES.

1. INTRODUCCION

La expresión:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 140y = f(t) \qquad (1.1)$$

puede representarse:

a) una ecuación diferencial lineal ordinaria de 2º orden, pura y simplemente.

b) el modelo matemático de un sistema físico de 2º orden, sometido a un estímulo f(t) y cuya respuesta a este estímulo es y(t).

Independiente de la causa que origine el planteamiento de (1), las operaciones a ejecutar pertenecen al siguiente conjunto:

1/ derivación de la variable dependiente respecto del tiempo

2/ suma algebráica de variables

3/ multiplicación de una variable por una cte

4/ representación analítica de una variable o función (f(t)).

5/ integración para obtener el resultado y(t).

Si consideramos la clase de todas las ecuaciones algebráicas y las ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, el conjunto de operaciones necesarias ha de ampliarse con

6/ producto de dos variables, funciones del tiempo

7/ derivación de una variable respecto de otra

El problema está en que, salvo raras excepciones, estas ecuaciones no aceptan métdos analíticos conocidos de resolución, o, desde un punto de vista práctico, tienen un nivel de complejidad que supera la formación media de los técnicos.

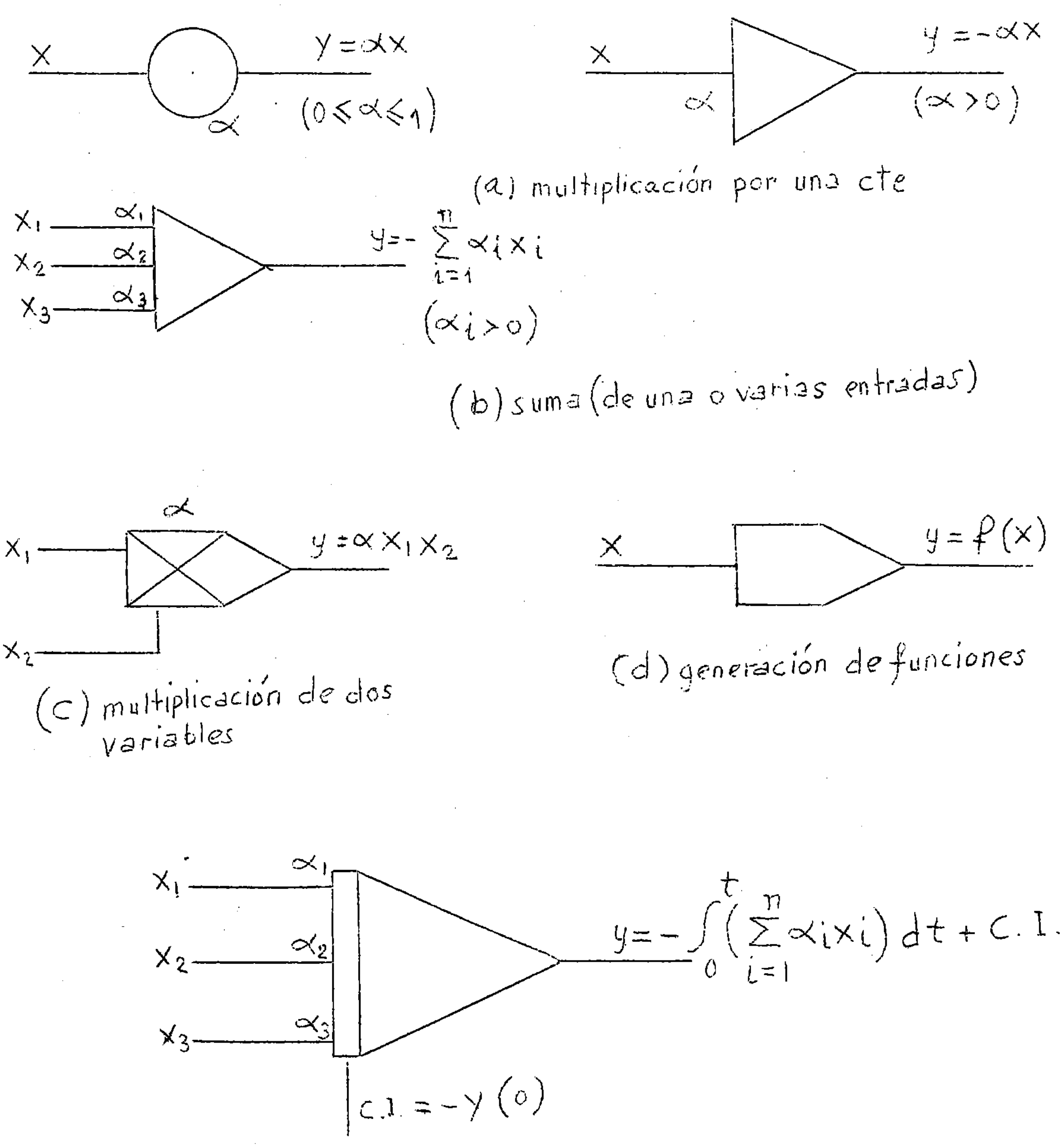
Afortunadamente existen dispositivos tecnológicos que, trabajando con magnitudes a las que se hace "representar" el papel de variables, realizan sobre aquellas alguna de las "operaciones" del conjunto anterior. Reunidos los dispositivos necesarios y combinados adecuadamente entre si pueden simularse la dinámica de cualquier ecuación (1), que es igual que resolverla.

Aqui nos interesamos por los dispositivos electró nicos que "operan" analógicamente; esto quiere decir que las variables se materializan por voltajes instatáneos. Cuando se reune una determinada cantidad de estos circuitos en una determinada forma se constituye un calculador analógico o analizador diferencial. Las variables consideradas son todas de naturaleza contínua con el tiempo.

En páginas sucesivas intento dar una idea breve pero lo más completa posible acerca de los principios básicos de funcionamiento de los calculadores analógicos de acoplo directo.

2. SIMBOLOS

Por desgracia no todos los autores utilizan los mismos símbolos para designar gráficamente dada una de las operaciones. He aquí algunos de los más usuales:



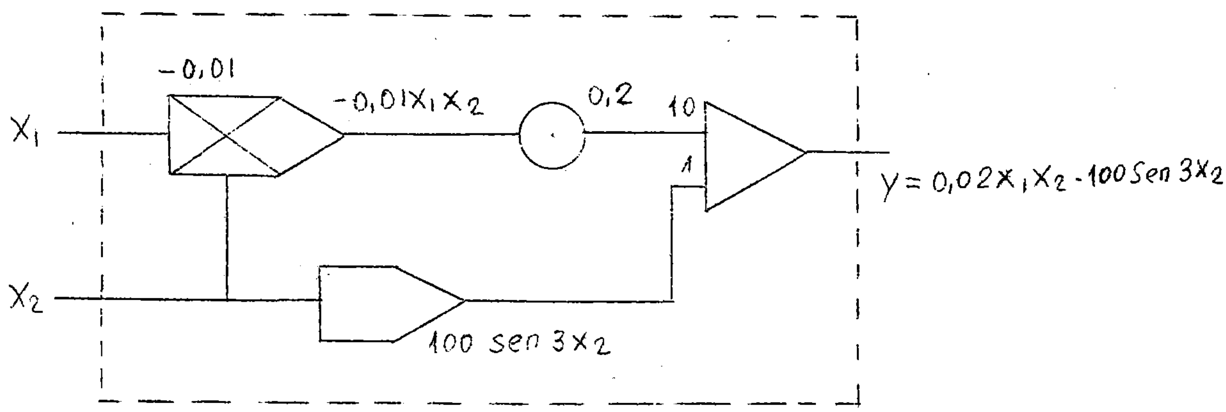
— fig. 1 —

Este simbolismo va ligado íntimamente a la circuitería electrónica que materializa tales operaciones, haciendo abstracción, naturalmente del detalle de los componentes físicos.

- x e y son variables con el tiempo
- α_i son ctes reales, o sea números.

Obsérvese que casi ninguna operación se ejecuta de una forma limpia, sino arrastrando el producto por una cte. Sobre ello se insistirá mas adelante porque es de suma importancia en la programación.

2.1 Ejemplo.-



— fig. 2 —

En la figura 2 se comprueba cómo, combinando algunas de las operaciones matemáticas simples que acabamos de aprender a simbolizar, se construye una operación más complicada.

3. ELEMENTOS BASICOS COMPONENTES DE UN CALCULADOR ANALOGICO. OPERACIONES LINEALES

3.1.- Amplificador operacional. Caracteristicas ideales

Es la pieza maestra con la cual se construyen los circuitos que reproducen la mayoria de las operaciones matemáticas enunciadas más arriba. El amplificador operacional en sí es una reunión de un cierto número de componentes activos y pasivos, adscritos a tal o cual tecnologia electrónica, conectados de tal forma que el resultado final sea un bloque con las siguientes características ideales:

a) ganancia elevada ($>10^7$ en valor absoluto, de signo negativo).

b) Linealidad en un amplio margen de operación, (muy amenudo desde - 100 a +100 v. para la salida).

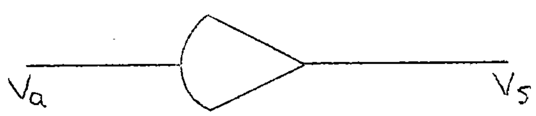
c) Respuesta plana en frecuencia; generalmente desde cero hasta varios cientos de ciclos/seg., a veces hasta algunos kilociclos.

d) Voltage de salida nulo, cuando el de entrada es nulo(si no es así se dice que hay deriva, debida a diversas causas que se transmiten por el acoplo directo).

e) Empedancia de entrada muy elevada.

f) Muy bajo nivel de ruido

El símbolo de este bloque suele ser



En adelante suponemos satisfechas todas estas condiciones

3.2.- Resistencias, capacidades, potenciómetros.

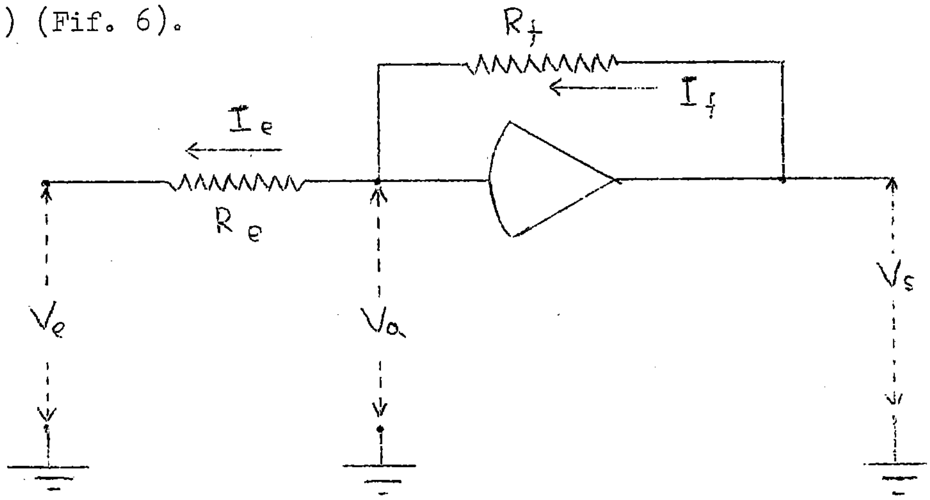
Estos componentes, utilizados para conectarse de distinta forma en un amplificador operacional, exigen una caracteristica común: alta precision.

3.3.- Multiplicación por una constante. División

En general puede conseguirse de dos maneras diferentes:

a) Utilizando una resistencia previa al amplificador y otra resistencia realimentada al mismo (figs. 3 y 4)

b) Utilizando un potenciometro además del esquema señalado en a) (Fif. 6).



— fig. 3 —

En la fig. 3:

$$V_a = \frac{V_s}{-G} \simeq 0 \quad (3.31), \text{ por ser } G \text{ muy grande}$$

$$I_e = I_f \quad (3.32), \text{ debido a la gran impendancia de entrada.}$$

o sea $$\frac{V_e - V_a}{R_e} = \frac{V_a - V_s}{R_f} \longrightarrow \frac{V_e}{R_e} = -\frac{V_s}{R_f} \qquad (3.33)$$

El resultado es:

$$\boxed{V_s = \frac{-R_f}{R_e} V_e} \qquad (3.34)$$

en donde son de resaltar varios puntos:

a.1) La tensión de entrada (variable de entrada) queda multiplicada por un término cte $= \dfrac{R_f}{R_e}$

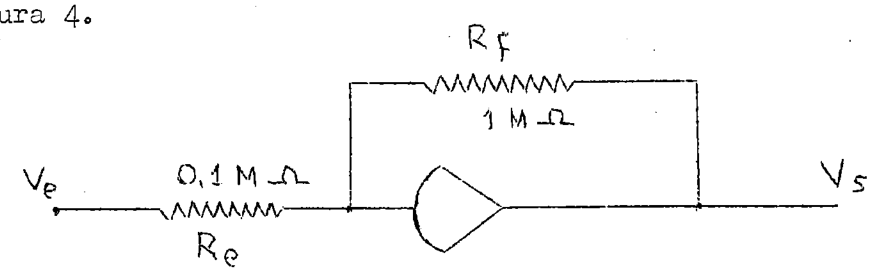
a.2) Este término es >1 ó <1 según $R_f > R_e$ ó $R_f < R_e$ (En general se toma >1)

a.3.) Sea cual sea el valor de esta cte, se produce <u>siempre</u> un cambio de signo en el resultado.

a.4.) Es digno de observar que G no aparece para nada en (3.34), partiendo de que la hipótesis (3.31) sea suficientemente cierta.

a.5.) A nivel práctico, hay que anotar que el fabricante entrega piezas de resistencias (con las cuales establecer los circuitos operativos) de 3 ó 4 valores diferentes normalizados, cuyas relaciones son por ejemplo de 10, 4 y 1, por citar un caso corriente. Esto supone que una variable puede multiplicarse por 10, por 4 o por 1, pero no por cualquier otro valor intermedio.

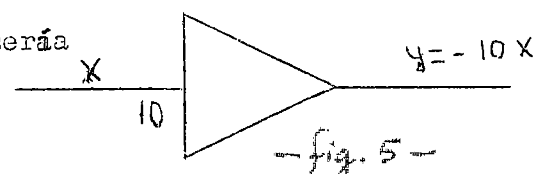
a.6.) Dado que, implícitamente, se supone cierta (3.31) esta hipótesis puede reflejarse en los gráficos eliminando de ellos el símbolo de "tierra". Asi, la figura 3 se convierte en la figura 4.



— fig. 4 —

<u>Ejemplo</u>.- Se desea resolver la ecuación y = −10 x.

Si el voltaje Ve simula a x, y si R_f = 1 MΩ y R_e= = 0,1 MΩ , V_s "representará" a y (fig. 4). El símbolo de dicha operación (cf. fig. 1.(a)) sería



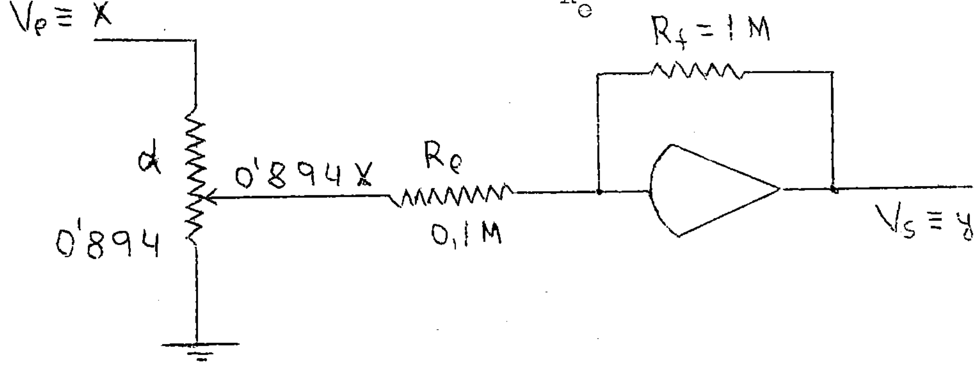
— fig. 5 —

<u>Caso particular importante: La inversión</u>

Si en el circuito de la fig. 4 se hacen R_f = R_e, se instrumenta una <u>inversión</u> o cambio de signo, una de las más utilizadas en el dominio de la computación analógica.

Para multiplicar por una cte que no pertenezca al conjunto de valores standardizados (cf. a. 5)) es forzoso recurrir a un esquema del tipo reseñado en b). Sabido es que un potenciómetro actúa como divisor de tensión lo que es patente en el simbolo de la figura 1.(a) ($0 \leq \alpha \leq 1$).

El resultado es que, si se quiere efectuar la operación $y = -\beta\, x$, es preciso escoger una posición del cursor del potenciómetro, tal que $\beta = \alpha \cdot \frac{R_f}{R_e}$



—fig. 6—

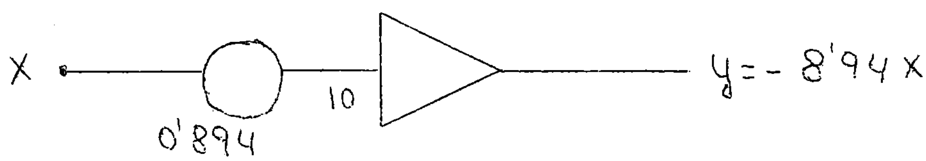
Con unas conexiones como las de la fig. 6 se realiza la operación

$$\boxed{V_s = - \alpha \frac{R_f}{R_e} V_e} \qquad (3.35)$$

$$\text{con} \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \qquad (3.36)$$

$$\frac{R_f}{R_e} \text{ algún valor standardizado} \qquad (3.37)$$

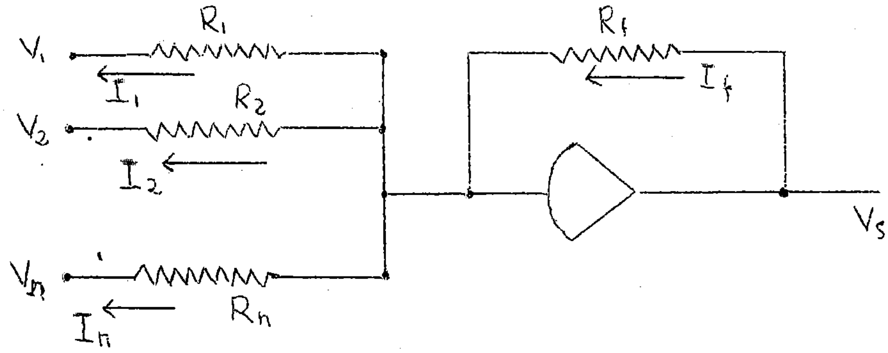
donde, a título de ejemplo, se han escogido $\alpha = 0{,}894$ y $R_f/R_e = 10$ para construir la operación $y = -8{,}94\, x$. He aquí como puede simbolizarse esta operación:



—fig. 7—

3.4.- Suma algebráica

Un amplificador operacional admite hasta un cierto nº de entradas, nº que suele estar limitado por el fabricante.



— fig. 8 —

El circuito de la fig. 8 sirve para sumar, ya que, - por las mismas hipótesis (3.31) y (3.32) puede escribirse sucesivamente:

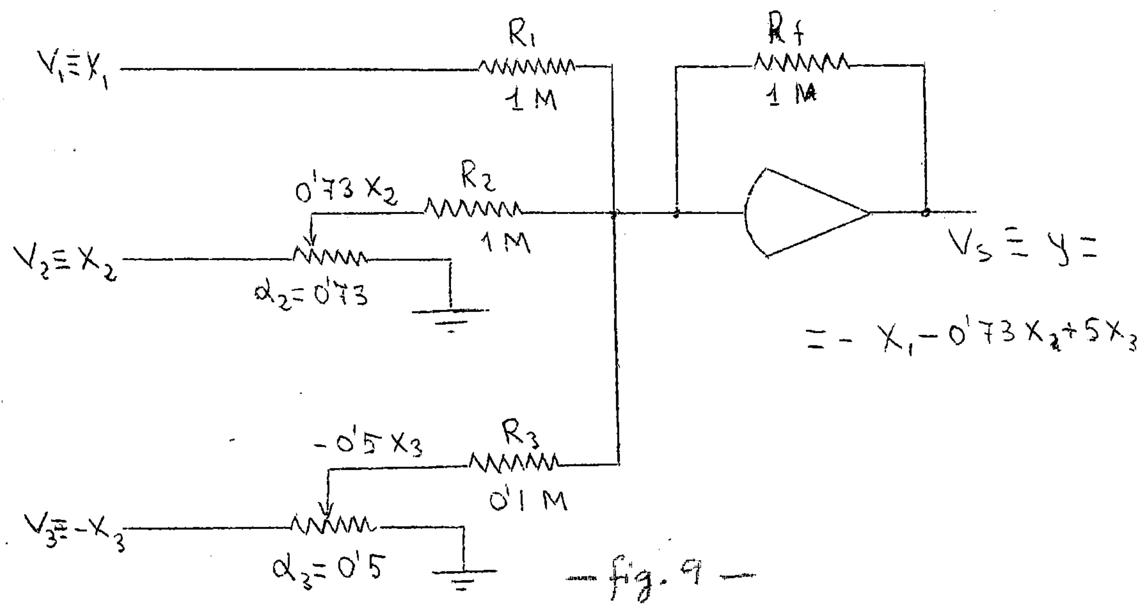
$$I_f = I_1 + I_2 + \ldots\ldots + I_n \qquad (3.41)$$

$$\frac{-V_s}{R_f} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \ldots\ldots + \frac{V_n}{R_n} \qquad (3.42)$$

$$\boxed{V_s = -\left(\frac{R_f}{R_1}V_1 + \frac{R_f}{R_2}V_2 + \ldots\ldots + \frac{R_f}{R_n}V_n\right)} \qquad (3.43)$$

donde V_1, V_2,.... V_n pueden ser positívas o negativas, según conveniencia del problema. El resultado final es una suma algebráica (con signo contrario) de las "variables" V_1, V_2,.... V_n ponderadas por los factores $\frac{R_f}{R_1}$, $\frac{R_f}{R_2}$,...... $\frac{R_f}{R_n}$ (caso particular $\frac{R_f}{R1}$ = ... $\frac{R_f}{R_n}$ = 1)

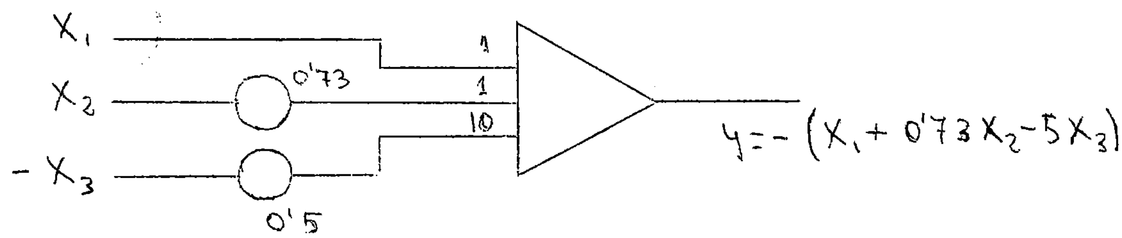
Ejemplo.- Resolver la ecuación $y = -x_1 - 0{,}73x_2 + 5x_3$ (circuito de la figura 9).



— fig. 9 —

Obsérvese cómo se ha tenido en cuenta el cambio de signo que produce el sumador; para obtener el resultado correcto se ha tomado una tensión V_3 negativa.

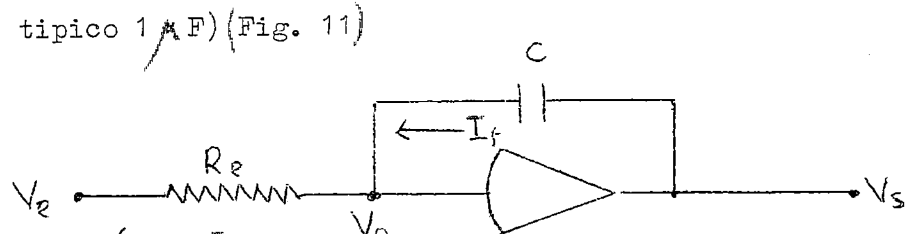
Por ultimo, la fig. 10 ilustra el simbolismo (cf. apartado 2) utilizado en la representación de las operaciones que realiza el circuito de la fig. 9.



— fig. 10 —

3.5.- <u>Integración</u>

En el circuito básico de integración el componente que realimenta el amplificador operacional es una capacidad (valor tipico 1 μF) (Fig. 11)



— fig. 11 —

$$I_f = \frac{dq}{dt} = C\,\frac{d(V_a - V_s)}{dt} \simeq - C\,\frac{dV_s}{dt} \qquad (3.51)$$

$$I_e = I_f \qquad (3.52)$$

$$I_e = \frac{V_o - V_a}{R_e} \simeq \frac{V_e}{R_e} \qquad (3.53)$$

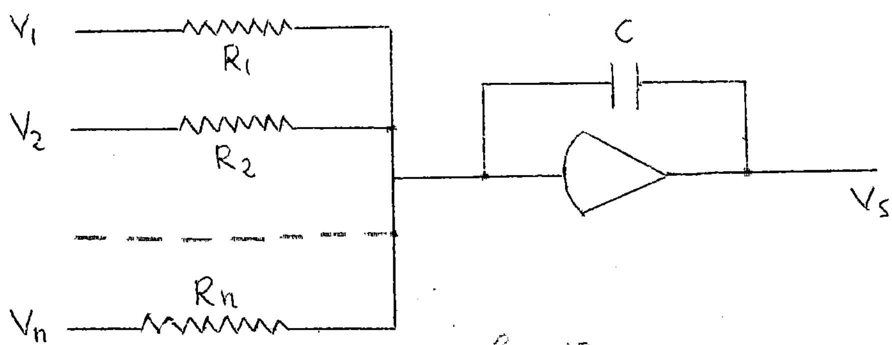
de (3.51), (3.52) y (3.53) se obtiene, por eliminación de I_e e I_f:

$$dV_s = - \frac{1}{R_e C}\int_0^t V_e dt \qquad (3.54)$$

$$\boxed{V_s = - \frac{1}{R_e C}\int_0^t V_e dt + V_s\,(0)} \qquad (3.55)$$

V_s (0), equivalente a la cte de integración en las integrales indefinidas, es la tensión inicial (para t=0) en bornas del condensador (o tensión de salida)

Hemos visto que, en realidad, el amplificador puede atender simultáneamente a varias entradas distintas, por lo que son más generales el esquema de la figura 12 y la expresión (3.56), con Vi positivo o negativo.



- fig. 12 -

$$\boxed{V_s = - \int_0^t \left(\sum_{i}^{n} \alpha_i V_i\right) dt + V_s\,(0)} \qquad (3.56)$$

con $\alpha_i = \frac{1}{R_i C}$ valores standardizados em cada computador

Cuando V_i y V_s corresponden a la varible x_i e y de un problema matemático, la operación (3.56) se simboliza por la fig. 1 (d).

Observamos de nuevo cómo se obtiene el resultado de la operación con signo contrario al deseado, servidumbre impuesta por el amplificador operacional.

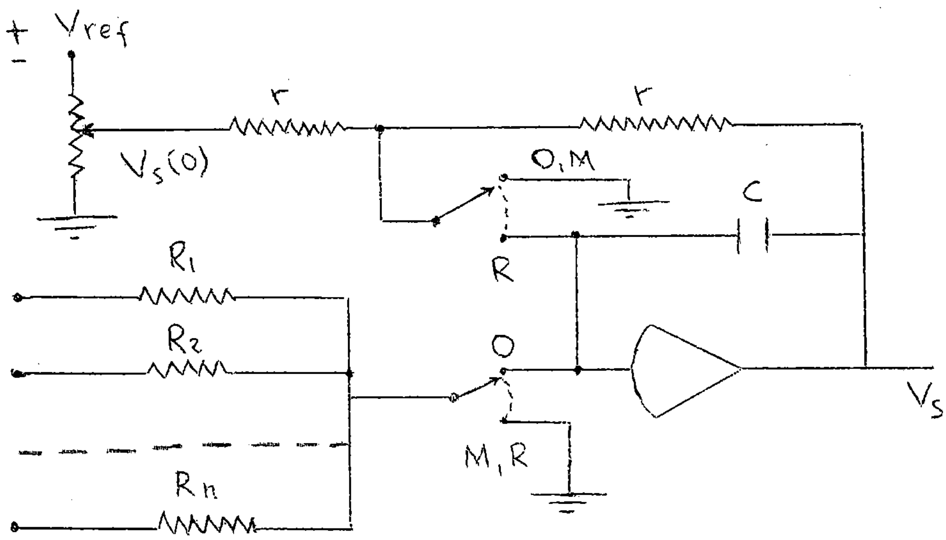
Observación.

Algunos autores acostumbran denominar integrador al circuito de la fig. 11 e integrador-sumador al de la fig. 12.

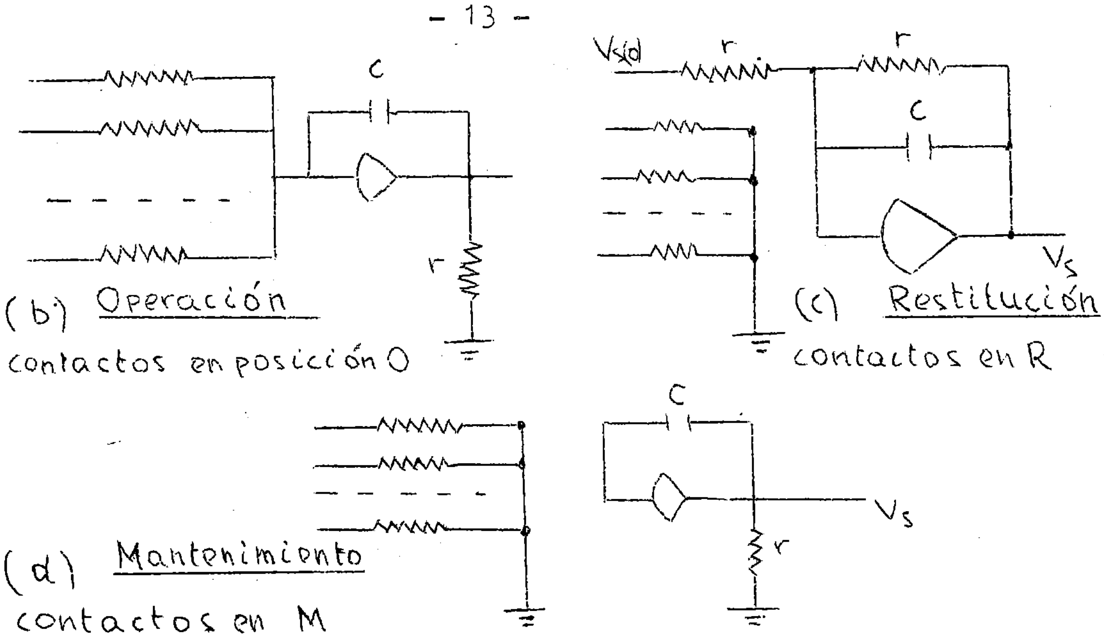
Es evidente que se trata del mismo circuito, aunque de él pueden utilizarse a voluntad una o varias entradas y está claro que, siempre que sea factible, conviene utilizar esta última posibilidad.

3.51.- Establecimiento de la condición inicial

El valor inicial está representado, lo mismo que cualquiera otra variable, por un voltaje, lo cual quiere decir que hay que proveer los medios para aplicar dicho voltaje en bornas del condensador y retirarlo en el instante de comenzar los cálculos.



(a)



- fig. 13 -

La fig. 13 ilustra de forma general el procedimiento de aplicación de la tensión inicail V_s (0), a partir de un voltaje de referencia que podrá escogerse positivo o negativo, en función del problema. Los contactos que conmutan las distintas posiciones (O = operación, R = restitución (C.I.), M = mantenimiento) forman parte de relés, excitados o no, que no aparecen en el gráfico.

En las figs. 13 (a) y 13 (b) el circuito actúa como integrador.

La figura 13 (c) nos muestra de qué forma se aplica la condición inicial V_s (0). Si se compara este dibujo con el de la fig. 4, se aprecia que estamos en presencia de un circuito inversor, ya que $R_f = R_o = r$, donde aparece una capacidad C en paralelo con R_f. Esto significa que, en lugar de realizar la operación

$$V_s = - V_e = - V_s (0) \qquad (3.511)$$

realizamos

$$V_s = - \frac{1}{rCs + 1} V_s (0) \qquad (3.512)$$

expresión donde conviene no confundir s (variable de Laplace) con s (subíndice de la tensión de salida).

Si llamamos $D = \frac{d}{dt}$ (operador de derivación) - (3.512) puede escribirse en el dominio tiempo:

$$V_s = - \frac{1}{rCD + 1} V_s (0) \qquad (3.513)$$

de (3.512) o de (3.513) se deduce que, en regimen permanente, - con rapidez impuesta por la cte de tiempo rC, $V_s = - V_s (0)$, a partir de cuyo instante puede conmutarse el circuito y empezar a operar. (Valores corrientes: r = 0,1 MΩ; C = 1 μF rC = 0,1 seg)

Observación muy importante.

No debe olvidarse que, si se quiere imponer un valor inicial positivo, y (o) p. ej., hay que conectar una tensión negativa, del mismo valor absoluto y (o). Y viceversa.

Los calculadores modernos ofrecen la posibilidad de detener la ejecución del cálculo (fig. 13(d.), manteniendo el valor V_s (t) presente durante el tiempo deseado, con objeto de proceder a mediciones, registros, u otras manipulaciones.

3.6.-Derivación

Teóricamente puede construirse un circuito de derivación partiendo de un amplificador operacional al que se conectase una capacidad de entrada y una resistencia en realimentación.

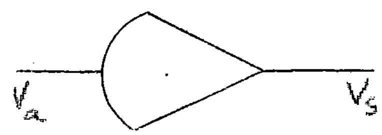
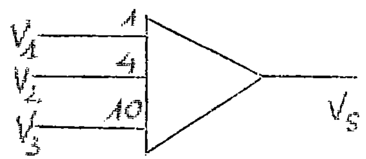
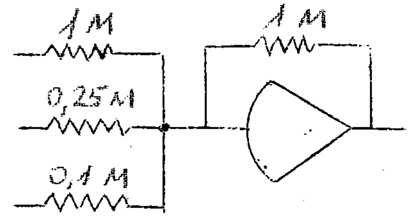
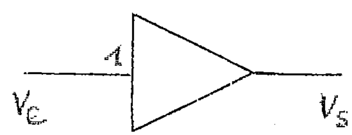
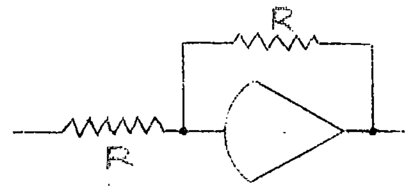
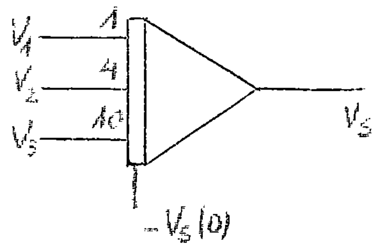
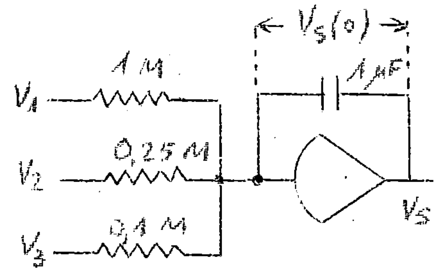
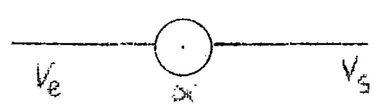
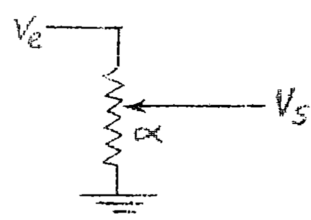
En la práctica, sin embargo, este circuito presenta dificultades ya que, cualquier ruido presente en la entrada del mismo, una variación brusca, tiende a ser magnificados (por la misma índole de la operación) y esto enmascara completamente la derivada.

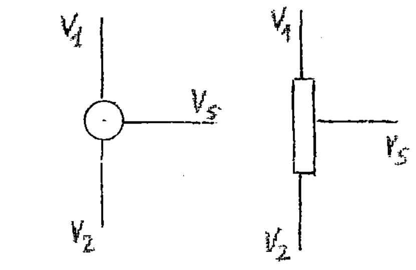
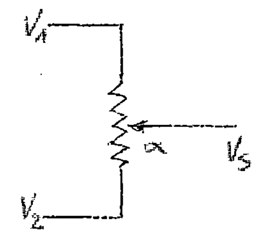
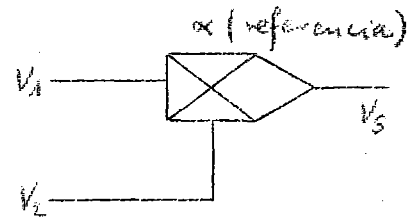
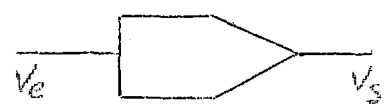
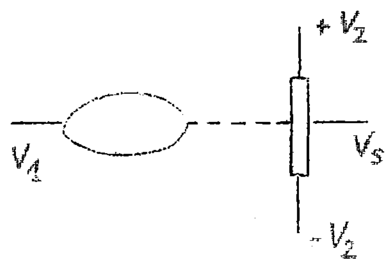
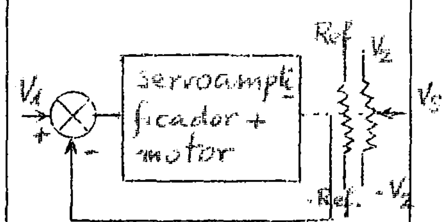
La consecuencia inmediata es que, del conjunto de operaciones enunciadas en el apartado 1, desde el punto de vista técnico es conveniente saber que tenemos que privarnos de - ésta.

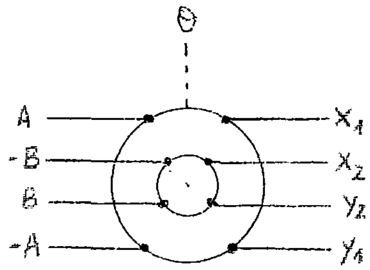
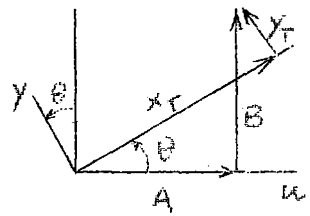
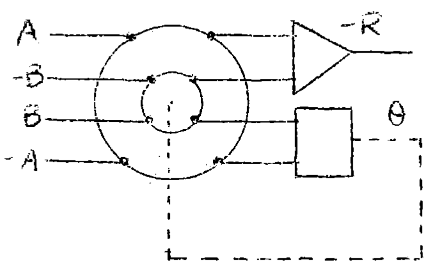
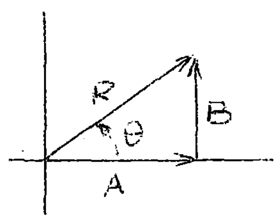
3.7.-Cuadro resúmen

Figuran en ella algunos circuitos que no hemos analizado, tales como los que realizan las operaciones 4/ (generación de funciónes) y 6/(multiplicación de dos funciones) reseñados en el apartado 1.

En la culumna correspondiente a símbolos para programación se han designado las entradas por V_1, V_2, etc.. que, deben sustituirse por los nombres de las variables utilizadas en cada problema matemático particular. Aqui V_1, V_2...representan voltajes.

Elemento de cálculo	Símbolo para programación	Circuito	ecuación	Comentario
Amplificador operacional		$-G$ ganancia en bucle abierto	$V_s = -G \cdot V_a$	Conveniente $G > 10^7$
Amplificador Sumador			$V_s = -(V_1 + 4V_2 + 10V_3)$	Consta de un amplificador de elevada ganancia y elementos pasivos; Comentario aplicable a los elementos inversores e integradores
Amplificador inversor			$V_s = -V_e$	
Amplificador integrador			$V_s = -\left[\int_0^t (V_1 + 4V_2 + 10V_3)\,dt + V_s(0)\right]$	Condición inicial para t=0. Aparece como carga en bornas del condensador.
Potenciómetro a tierra			$V_s = \alpha V_e$	$0 \leq \alpha \leq 1$ En muchos calculadores el terminal de tierra va permanentemente conectado e inaccesible al utilizador

potenciómetro flotante			$V_s = \alpha V_1 + (1-\alpha) V_2$	
multiplicador electrónico		La referencia es un voltaje fijo. Hay varios tipos distintos de multiplicadores	$V_s = \alpha V_1 V_2$	Se utiliza este símbolo para indicar la operación general de multiplicación de dos variables
Generador electrónico de funciones		Muchos tipos diferentes. Se clasifican en: - Generadores de funciones fijas - Generadores de funciones variables	$V_s = f(Ve)$	$f(Ve)$ es una función arbitraria, que puede cambiar de un problema a otro
Servomultiplicador			$V_s = \dfrac{V_1 \cdot V_2}{\text{referencia}}$	El servopotenciómetro tiene el mismo símbolo que el potenciómetro flotante. Condición para la tensión de entrada $\lvert V_1 \rvert \leq$ referencia (- - -) conexión mecánica

Resolutor			$\begin{cases} X_T = X_1 + X_2 \\ Y_T = -Y_1 + Y_2 \end{cases}$ $\begin{cases} X_1 = A\cos\theta \\ Y_1 = A\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$ $\begin{cases} X_2 = B\,\mathrm{sen}\,\theta \\ Y_2 = B\cos\theta \end{cases}$ o, en notación matricial: $\begin{bmatrix} X_T \\ Y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \mathrm{sen}\,\theta \\ -\mathrm{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$	Es una transformación de los componentes de un vector (A, B) en un sistema de coordenadas (u, v) a los componentes (X_T, Y_T) de un segundo sistema (x, y) girado un ángulo θ respecto del primero. Cuando las entradas son A ó B y θ, el resolutor transforma de coordenadas polares a rectangulares
Resolutor polar			$\theta = \mathrm{arctg}\,\dfrac{B}{A}$ $R = \sqrt{A^2 + B^2}$	Transformación de coordenadas rectangulares (A, B) a polares (R, θ) __Nota.__ – Los resolutores son elementos muy especializados y particulares a algún dominio de las técnicas. Todos los demas elementos son de aplicación general.

4.- EJEMPLOS DE PROGRAMACION

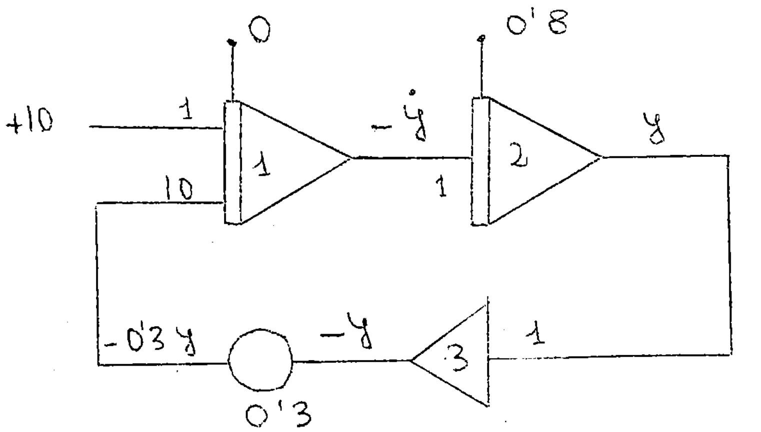
Programar un modelo matemático para un calculador analógico consiste en representar sus ecuaciones por un encadenamiento adecuado de símbolos pertenecientes a la segunda columna del cuadro anterior, teniendo en cuenta las consideraciones prácticas del apartado 3.

La realización de dicho programa consiste en conectar físicamente los componentes de acuerdo con la tercera columna.

Ya se ha visto un ejemplo de programación en el apartado 2, fig. 2.

4.1.- Ejemplo

Resolver por simulación $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 3y = 10$, con $y(0) = -0{,}8$; $\dfrac{dy(0)}{dt} = 0$. Supóngase que se dispone en los amplificadores de factores multiplicativos de 10 y 1.



- fig 14 -

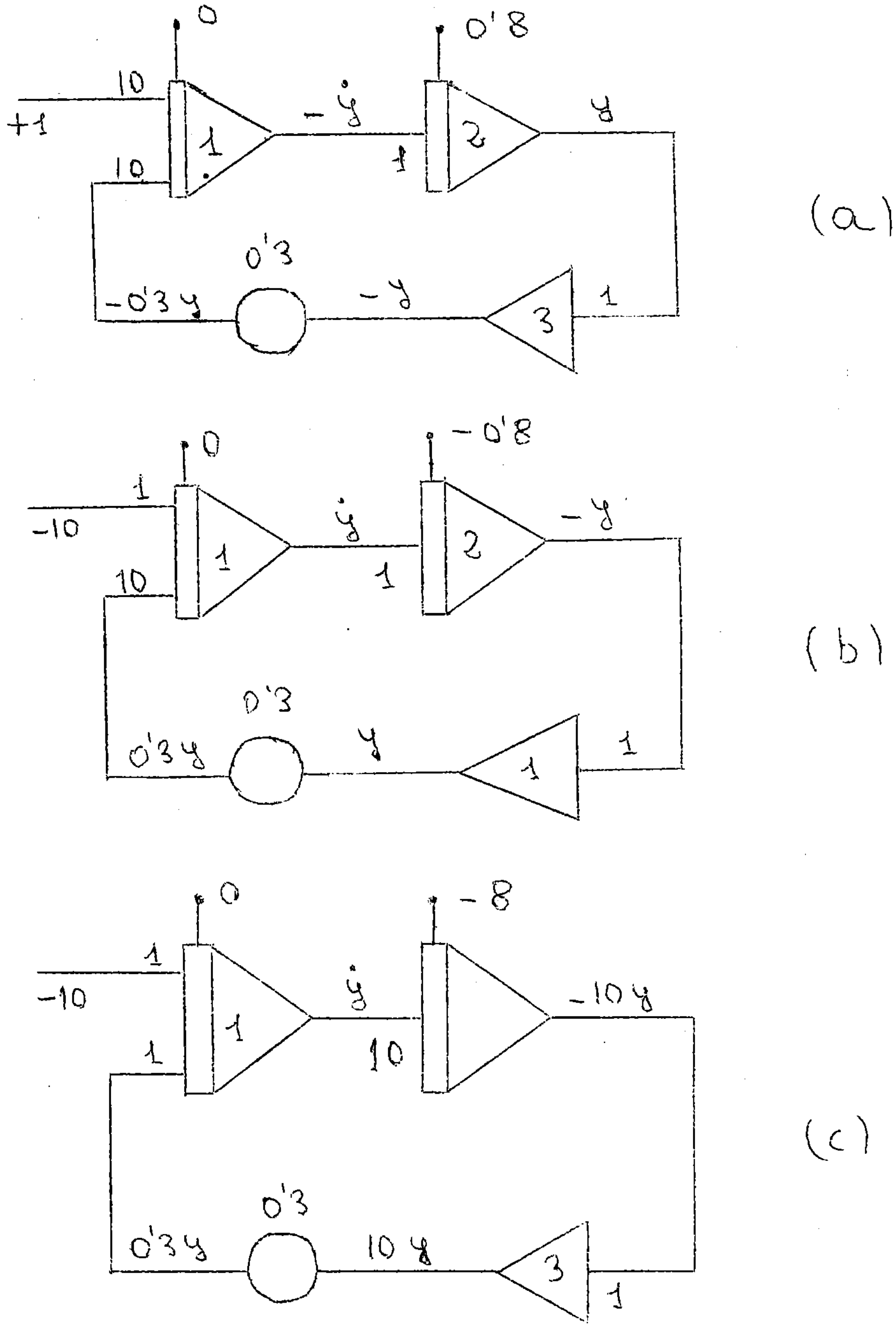
(Se acostumbra a numerar los amplificadores, por facilidad de referencia). A la salida del ampl. 1 tenemos:

$$V = -\int_0^t (10 - 3y)\, dt = -\dot{y} \quad (4\text{-}11)$$

ya que $\ddot{y} = 10-3y$ implica $\dot{y} = \int (10-3y)\, dt$

A la salida de 2 se tiene y, debido a la inversión de signo; (por tanto C.I. = 0,8).

Otros posibles programas:



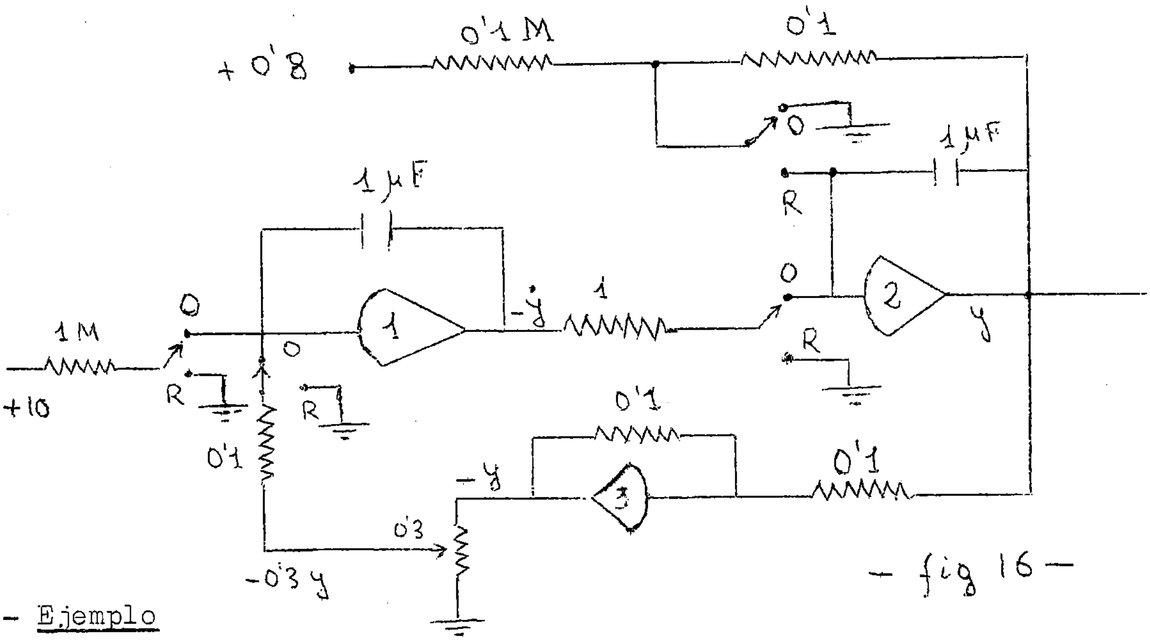
- fig 15 -

Los programas de las figs. 14 y 15 son equivalentes, salvo error u omisión. <u>Consecuencia: no existe un programa único para cada modelo matemático.</u>

Puede jugarse con los factores multiplicativos sin demasiado peligro, pero a nivel de amplificador integrador es preciso tener cuidado con la aplicación de las C.I (comparar (a),- (b) y (c)).

Una norma bastante general es la de programar, siempre que sea factible, de forma tal que la salida de cada integrador - sea la derivada de orden inferior, con signo + ó -, sobre todo cuando se trata del último integrador de la cadena. Así, p. ej. en el programa (c) tenemos ± 10y y no ± y que sería la solución de la ecuación diferencial. A veces, no obstante, puede resultar indicado amplificar esta solución (si resulta con valores muy pequeños) o reducirla (en el caso contrario)

La realización física del programa de la fig. 14 sería:



- fig 16 -

4.2.- Ejemplo

Realizar el programa de

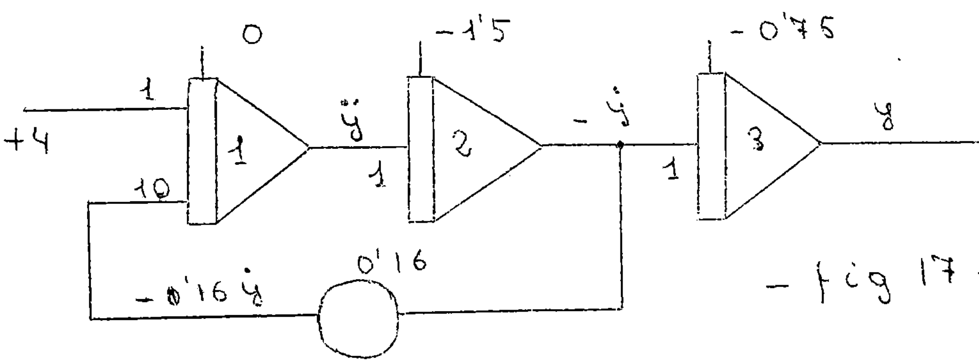
$$\dddot{y} - 1{,}6\,\dot{y} + 4 = 0 \qquad (4.21)$$

con las C.I.:

$$\left| \begin{array}{l} y_0 = 0{,}75 \\ \dot{y}_0 = -1{,}5 \\ \ddot{y}_0 = 0 \end{array} \right. \qquad (4.22)$$

(4.21) puede escribirse también:

$$\dddot{y} = 1{,}6\dot{y} - 4 \qquad (4.23)$$



- fig 17 -

Vemos que los amplificadores integradores 1, 2,y 3 reducen sucesivamente el órden de la derivada. El integrador nº 1 representa la ecuación (4.23), salvo el signo.

5. METODOS TEORICOS GENERALES DE PROGRAMACION DE ECUACIONES DIFERENCIALES.

Las ecuaciones diferenciales, lineales o no, ordinarias o parciales, constituyen, por decirlo así, la materia prima de trabajo de los calculadores analógicos, por ello también denominados analizadores diferenciales.

En este apartado nos referimos al problema de resolución de una ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales con condiciones iniciales, problema cuya solución es única.

5.1.- Metodo general

Supongamos se trata de programar la ecuación (5.11)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t) \qquad (5.11)$$

de otra forma escrita

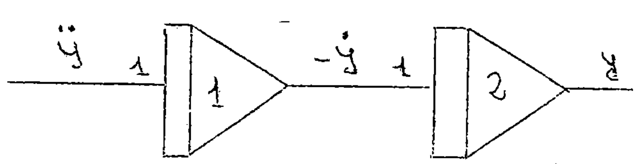
$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0 y = f(t) \qquad (5.12)$$

En la figura 18 se indican tres etapas sucesivas en la programación de (5.11) o (5.12).

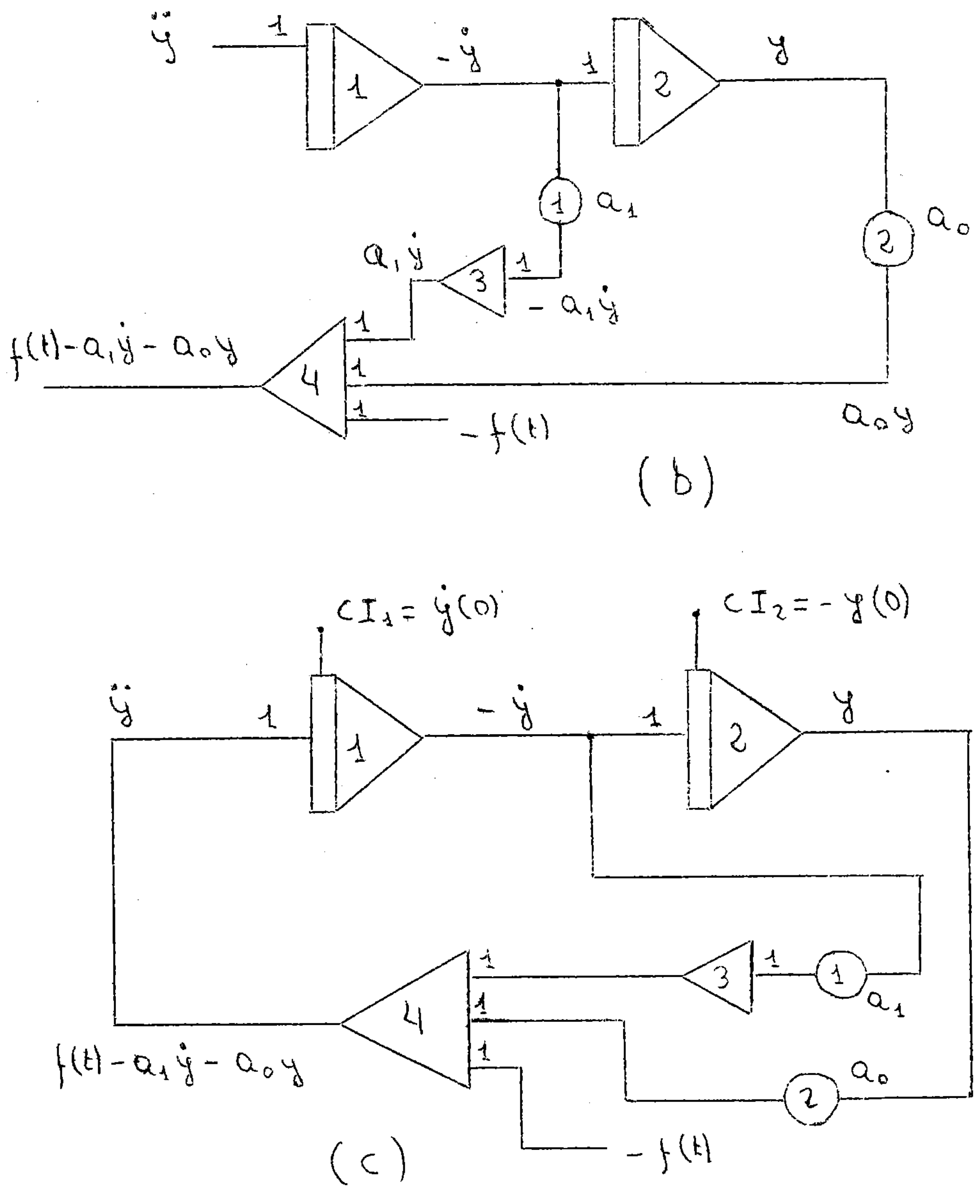
Como primera medida (etapa (a)) se iguala la derivada de mayor orden al resto de los términos de la ecuación.

$$\ddot{y} = - a_1\dot{y} - a_0 y + f(t) \qquad (5.13)$$

Se supone que es posible disponer de $\ddot{y}$ y se colocan tantos integradores en cadena como sea necesario para obtener la derivada de orden cero (fig. 18 (a))



(a)



— fig 18 —

En la siguiente etapa (b) se multiplica cada una de las derivadas por el coeficiente; se suman y se añade el término forzado f (t) para obtener el resultado de la fig. 18 (b).

Por último la salida del amplificador nº 4, igual a la derivada de mayor orden, se introduce como entrada en el integrador nº 1, cerrando el bucle. Sólo queda, para terminar la programación, aplicar las C.I. en los integradores (fig. 18 (c)).

Lo importante de la exposición de este método no es la ecuación (5.11) ni el programa de la fig. 18, referidos a un caso particular con el fin de fijar ideas, sino el esquema de trabajo, extensible a cualquier ecuación de orden n. He aquí otro ejemplo muy distinto del anterio, programable por el mismo sistema.

Ejemplo.-

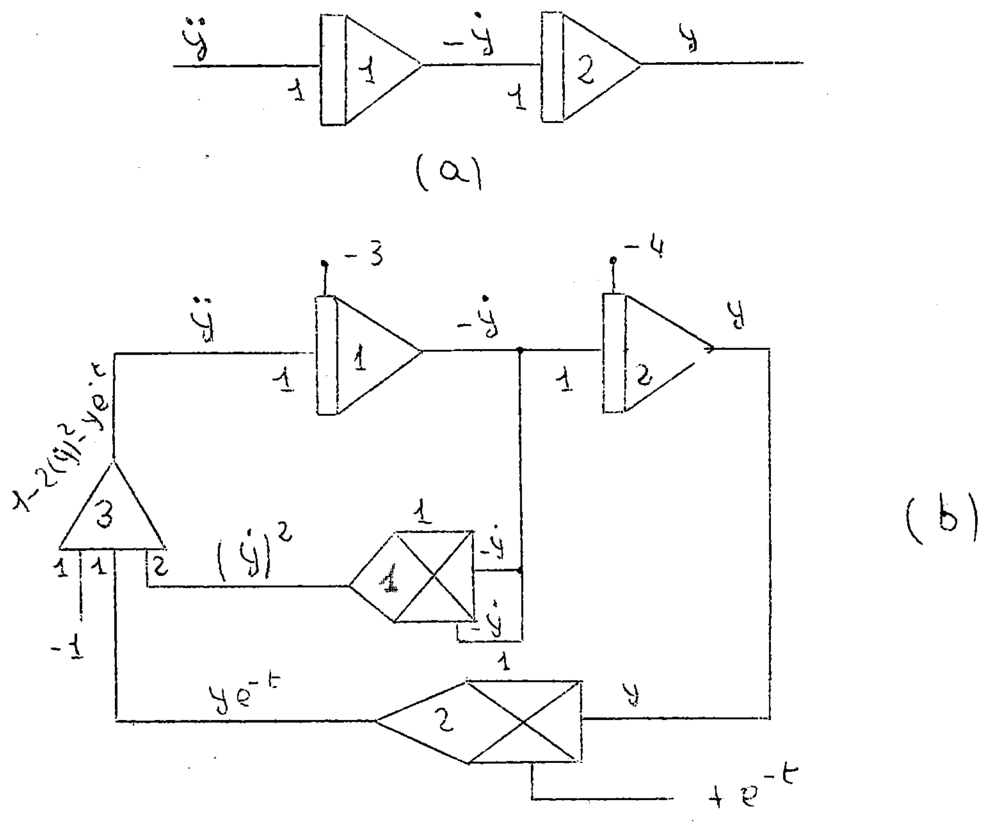
Programar $\ddot{y} + 2(\dot{y})^2 + e^{-t}y = 1$ (5.14)

con: $y(0) = 4$

$\dot{y}(0) = -3$ (5.15)

La diferencia con el caso anterior está en que se utilizan elementos nuevos (multiplicadores) por tratarse de una ecuación no lineal y un factor multiplicativo igual a 2 en el amplificador nº 3. Ver fig. 19.

$$\ddot{y} = -2(\dot{y})^2 - e^{-t}y + 1 \qquad (5.16)$$



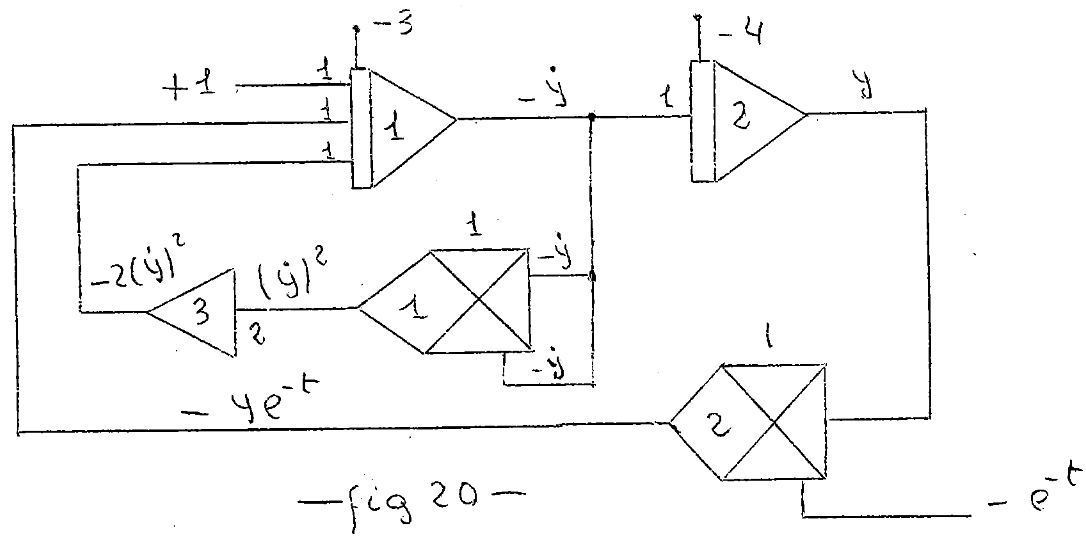
- fig 19 -

5.11- Nota de aclaración.-

En estos apuntes se ha adoptado el criterio de establecer, tanto en su forma literal como numérica, lo siguiente: La condición inicial de un integrador es el valor de la variable de salida en el instante inicial con signo contrario. - Así, si la salida de un integrador es y, la C.I. es $-y(0)$; si la salida es $-\dfrac{d^n y}{dt^n}$, la C.I. es $\dfrac{d^n y(0)}{dt^n}$

Este proceder difiere de la mayoría de los autores que prefieren conservar el concepto matemático.

La ecuación (5.16) hubiera podido también programarse como indica la fig. 20, que no sigue sistemáticamente el



—fig 20—

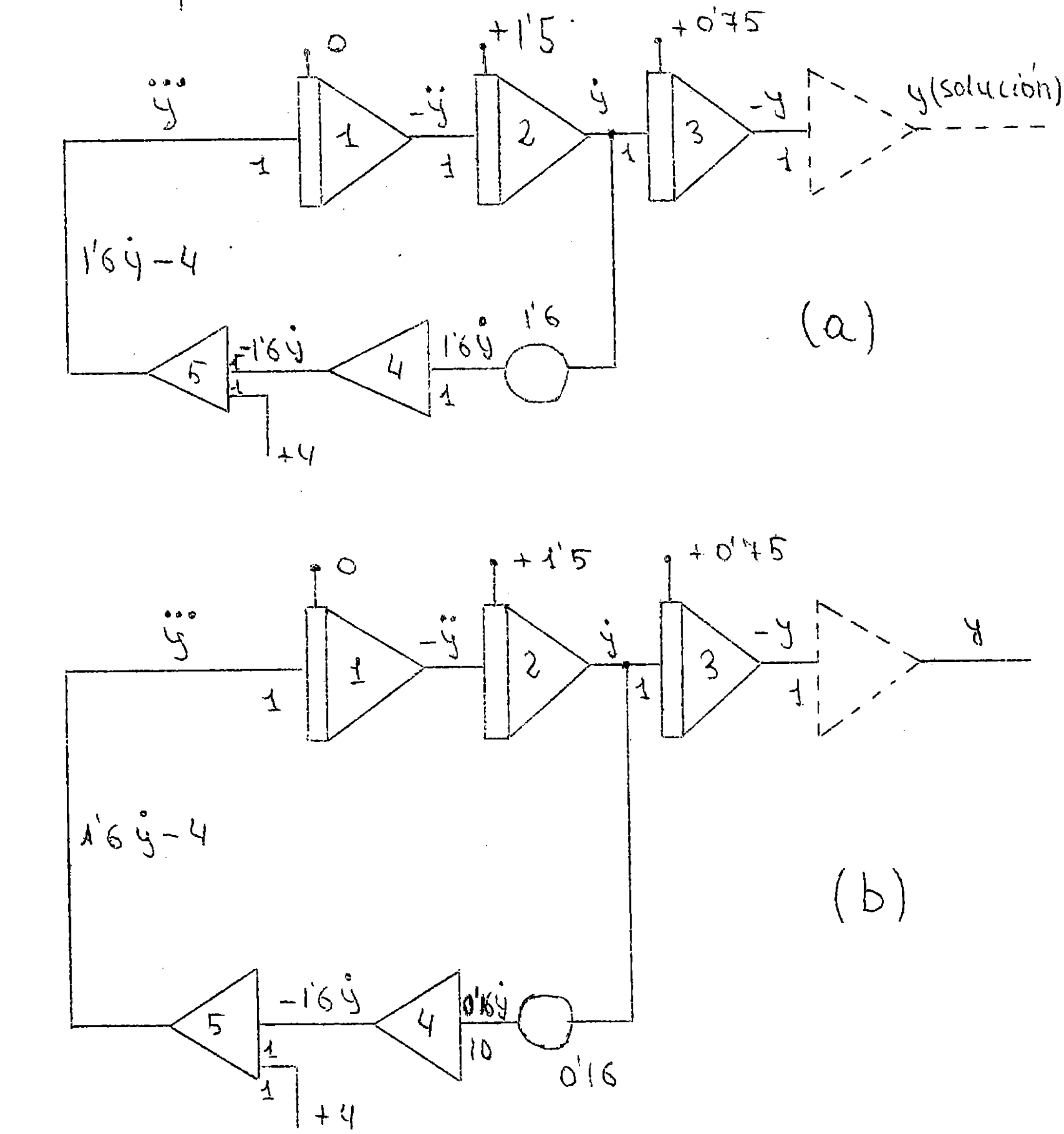
método indicado y que, en este caso concreto, no ahorra siquiera un amplificador.

5.12.-Crítica del método

Todo el que haya leido con atención los apartados 3 y 4 debe plantearse la siguiente cuestión: ¿ Qué ocurre cuando a_0, a_1, a_2,....etc... de (5.11) y similares son superiores a la unidad? En tal caso los esquemas de la fig. 18 son incorrectos, al menos a nivel de los potenciómetros. Y esta otra ¿ No pueden utilizarse otros factores multiplicativos distintos de 1? La respuesta es: pueden utilizarse y se utilizan, como muestran los programas 19 y 20, pero siempre teniendo en cuenta los valores de la gama permitida (1, 4 y 10 p. ej., en un caso particular, y múltiplos de estas cantidades, por conexión de una misma señal en varias entradas del mismo amplificador). La consecuencia es que el proceso esquematizado en la fig. 18 debe tomarse como esquema de trabajo más que en el sentido literal de suponer que un potenciómetro ha de representar por fuerza a un coeficiente, cualquiera que sea el valor de éste. etc.. Si no fuera así, ello nos llevaría a programar la ecuación (4.21) en el sentido de la figura 21 (a) cuando lo lógico es hacerlo en el de la fig. 21 (b).

$$\dddot{y} = 1{,}6\,\dot{y} - 4$$

con: $\left|\begin{array}{l} y_0 = 0{,}75 \\ \dot{y}_0 = -1{,}5 \\ \ddot{y}_0 = 0 \end{array}\right.$ (4.21)



— fig 21 —

Aún así, observamos que es más económico el programa de la fig. 17, y esto es debido a que el método de trabajo que acabamos de exponer, aparentemente no permite la utilización de más de una entrada en el integrador nº 1, siendo así que a menudo resulta rentable hacer uso de las variables posibles.

La consecuencia es la ya conocida de que los métodos generales, y por tanto teóricos, nunca son óptimos en los casos particulares. Su utilidad reside, más que en otra cosa, en representar un punto de arranque, norma u ordenación mental sobre las que introducir variaciones, para ser relegado por último al olvido.

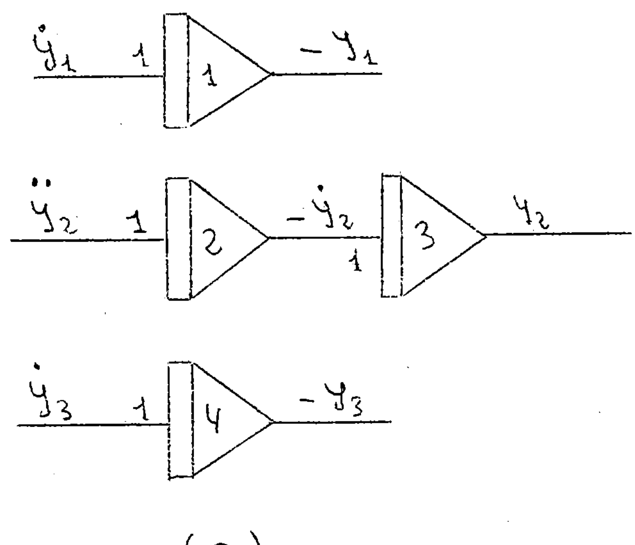
5.13.- <u>Sistema de ecuaciones diferenciales</u>

Puede aplicarse el método anterior, con las modificaciones pertinentes a cada caso. Veamos un ejemplo

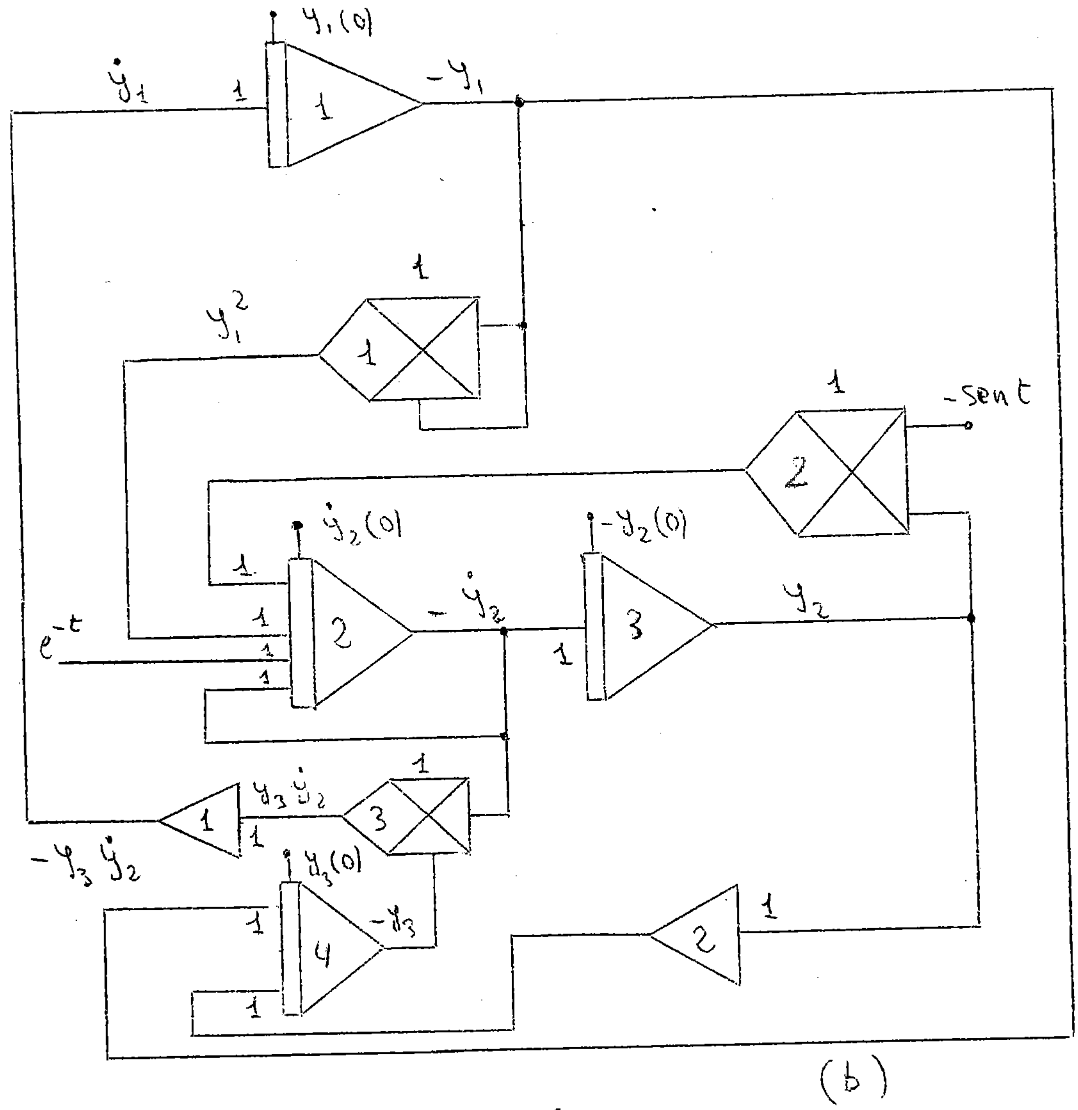
$$\left.\begin{aligned} &\dot{y}_1 + y_3\dot{y}_2 = 0 \\ &\ddot{y}_2 + \dot{y}_2 + y_2 \operatorname{sen} t - y_1^2 = e^{-t} \\ &\dot{y}_3 + y_1 + y_2 = 0 \end{aligned}\right| \qquad (5.131)$$

En la fig. 22 se describe el programa en 2 etapas (a) y (b)

$$\left.\begin{aligned} &\dot{y}_1 = - y_3\, \dot{y}_2 \\ &\ddot{y}_2 = - \dot{y}_2 - y_2 \operatorname{sen} t - y_1^2 + e^{-t} \\ &\dot{y}_3 = - y_1 - y_2 \end{aligned}\right| \qquad (5.132)$$



(a)



— fig 22 —

Observación

En la fig. 22, donde aparece ya un nº creciente de elementos de computación se numeran éstos de acuerdo con la clase a que pertenecen. Es decir, integradores 1, 2,..; inversores o sumadores 1, 2, ...; multiplicadores 1, 2...;

5.2.- Método de la formación canónica.

El método general del apartado 5.1 no es aplicable a la resolución de una ecuación o sistema de ecuaciones - diferenciales del tipo de (5.21)

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots\ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y =$$

$$= b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots\ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x \qquad (5.21)$$

donde la función impuesta consiste en la variable x y sus derivadas $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$,......, pero donde realmente solo se dispone de x. Este es precisamente uno de los casos más corrientes. Además ha quedado dicho en 3.6 que no es posible generar directamente las derivadas en un calculador analógico. El método de la forma canónica permite despejar estas dificultades y vamos a exponerlo con ayuda de un ejemplo:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_o y = b_1 \frac{dx}{dt} + b_o x \quad (5.22)$$

ya que siempre es posible normalizar respecto de uno de los términos. Resulta cómodo utilizar el operador $D = \frac{d}{dt}$, por lo que (5.22) puede tambien escribirse:

$$D^2y + a_1 Dy + a_o y = b_1 Dx + b_o x \quad (5.23)$$

y, si los coeficientes a_o, a_1,.....,b_o, b_1,.... son ctes.

$$D^2y = D(b_1 x - a_1 y) + b_o x - a_o y \quad (5.24)$$

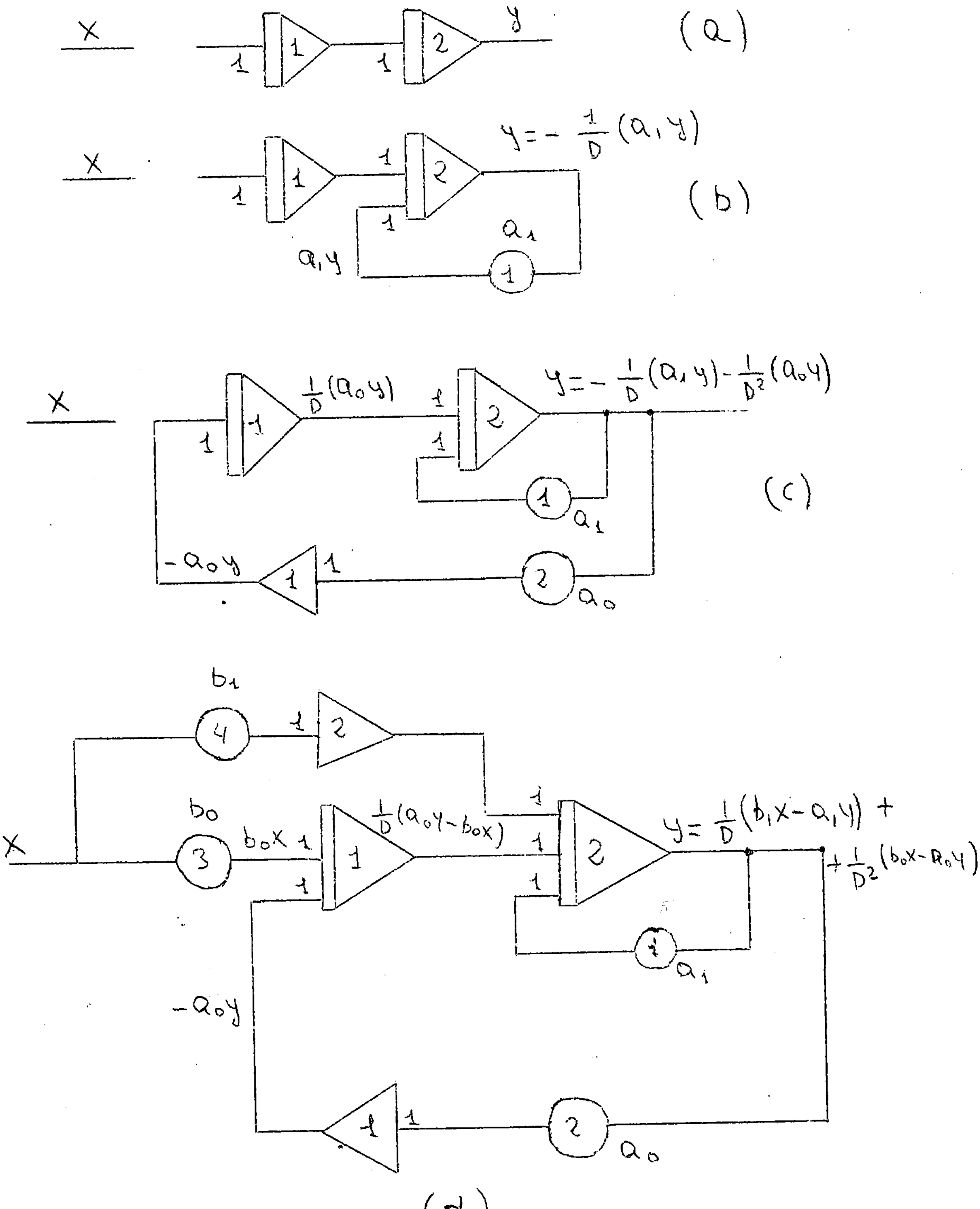
$$y = \frac{1}{D}(b_1 x - a_1 y) + \frac{1}{D^2}(b_o x - a_o y) \quad (5.25)$$

donde, en el lenguaje operacional, $\frac{1}{D}$ significa integrar una vez, $\frac{1}{D^2}$ integrar dos veces y asi sucesivamente.

La fig. 23 visualiza las etapas sucesivas de la programación. En primer lugar, (a), se coloca en cascada un número de integradores igual al orden de (5.21), en este caso n = 2. La diferencia fundamental con el caso anterior es que aquí no se supone disponible a la entrada del primer integrador la derivada de y de mayor orden, pero sí se supone, en cambio, que la salida del ultimo integrador es y. Se coloca x disponible pero sin con ectar.

En las siguientes etapas, suponiendo disponible y, se pretende programar aquellos términos que, en el 2º miembro de (5.25), dependen de y a través de una integración, de 2 integraciones, etc... (etapas (b) y (c) en el ejemplo actual)

En la etapa (d) se hace lo mismo con los términos dependientes de x.



— fig 23 —

5.21.- El problema de las condiciones Iniciales

En varios ejemplos previos a este método se ha especificado lo sencillo que resulta aplicar las C.I. en los integradores cuando la salida de éstos es ± la variable o ± alguna de sus derivadas. En tal caso simple, la C.I. es con precisión el valor de esta variable o de sus derivadas.

Ahora bien, en el método canónico la salida de cada integrador no es nunca (excepto en el último integrador donde la salida es siempre y) ninguna de las derivadas, sino expresiones más complicadas, como puede apreciarse en la fig. 23 (d). Esto plantea el problema de deducir qué C.I. hay que aplicar a cada integrador, partiendo de la hipótesis de que se conocen $y(0)$, $\dot{y}(0)$, $\ddot{y}(0)$...., $x(0)$, $\dot{x}(0)$, ... $x^{(m-1)}(0)$.

Como primera medida el valor inicial del integrador nº 2 (n en el caso general) es conocido: $-y(0)$.

La salida del integrador nº 1 es $\frac{1}{D}(a_0y-b_0x)$, por lo que interesa calcular $\left.\frac{1}{D}(a_0y-b_0x)\right|_{t=0}$. Integrando la ecuación (5.24) una vez y agrupando de forma adecuada, tenemos:

$$\frac{1}{D}(a_0y-b_0x) = (b_1x-a_1y) - Dy \qquad (5.211)$$

$$\left.\frac{1}{D}(a_0y-b_0x)\right|_{t=0} = (b_1x(0)-a_1y(0))-\dot{y}(0) \qquad (5.212)$$

donde el 2º miembro consta de términos conocidos y nos da el valor inicial para el integrador nº1.

En el caso general se integraría (5.24) otra vez y asi sucesivamente.

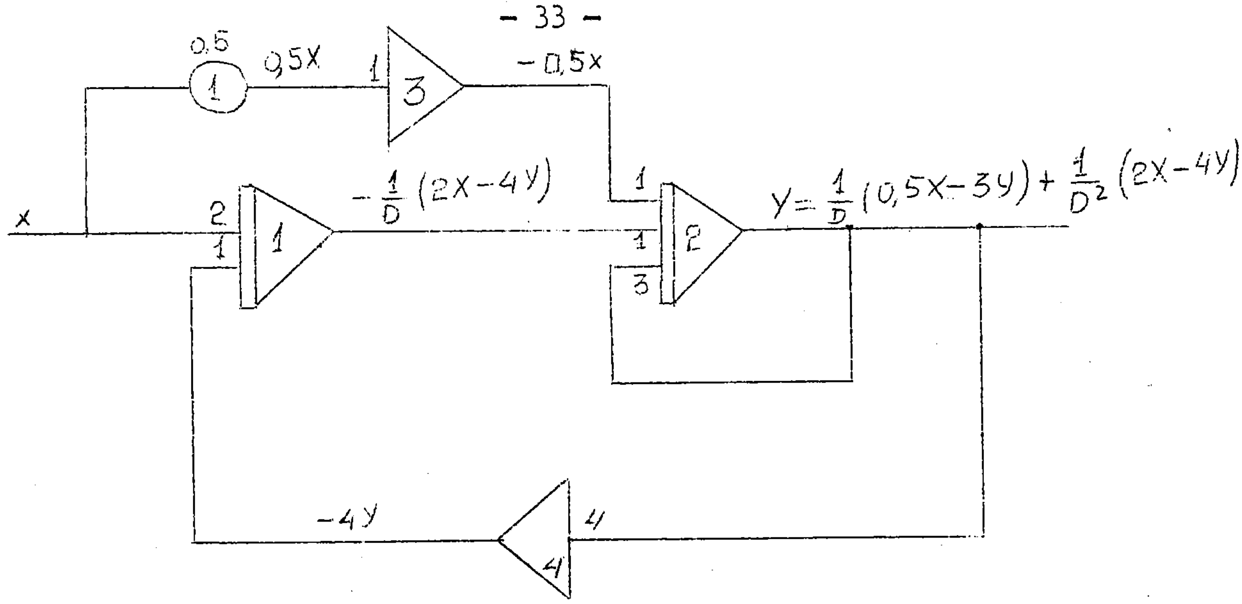
Ejemplo .-

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt} + 4y = 0,5\frac{dx}{dt} + 2x \qquad (5.213)$$

$$D^2y + 3Dy + 4y = 0,5\,Dx + 2x \qquad (5.214)$$

$$D^2y = D(0,5x - 3y) \quad (2x - 4y) \qquad (5.215)$$

$$y = \frac{1}{D}(0,5x - 3y) + \frac{1}{D^2}(2x-4y) \qquad (5.216)$$



— fig 24 —

Nota.- En la fig. 24, programar de la ecuación (5.213) se ha dado por supuesto que existen los factores multiplicativos 1, 2, 3 y 4. Se deja al cuidado del lector el cálculo del valor inicial del integrador nº 1 en función de x(0), y(0) e $\dot{y}(0)$

5.3.- Conclusión

Estos métodos generales, que no son únicos pero si quizád los más extendidos, permiten aproximarse a la solución de dos clases muy importantes de problemas. Es obvio, como hemos indicado, que, en casos particulares y con una cierta práctica en programación, se encuentra un camino mas apropiado. Es esto sin duda lo que ocurre cuando se trata de estudiar más que la solución de un problema, el efecto producido por las variaciones de algun conjunto de parámetros en dicha solución.

Por lo demás, hay que tener siempre en cuenta los puntos prácticos (limitación en los coeficientes potenciométricos, factores multiplicativos, ...) y, como se verá en el capitulo 6, todo lo que relacionado con las limitaciones físicas del material disponible, modifica sensiblemente la programación.

6. CAMBIOS DE ESCALA EN AMPLITUD Y EN TIEMPO

La mayor parte del trabajo que se realiza con los calculadores analógicos consiste en la simulación de los modelos matemáticos de procesos físicos, cuyas magnitudes, cualquiera que sea un valor, son representadas por voltajes en los elementos de computación (amplificadores operacionales, etc..) Estos voltajes están limitados, según el equipo, a ± 100 V; ± 50 V, ± 10 V.

Es evidente que hay que arreglarselas para que, independientemente de los márgenes de variación de las magnitudes físicas, éstas puedan ajustarse a las dimensiones de los voltajes disponibles. Se impone un cambio adecuado de escala en las amplitudes. De qué otro modo, si no, podría manejarse un problema donde, p. ej., una masa tiene un desplazamiento, una velocidad y una aceleración máximos de 0,5m., 50m/seg y 5.000 m/seg^2.

En cuanto al tiempo como unidad ocurre otro tanto. La unidad natural de tiempo en un proceso físico puede ser el milisegundo, puede ser la hora o incluso el año. En un calculador analógico la unidad de tiempo es el segundo. La consecuencia es que hay que imprimir una aceleración o una deceleración en la representación del modelo del proceso. En otras palabras, es necesario cambiar la escala de tiempo en las ecuaciones del sistema.

6.1.- Cambio de escala de las magnitudes

Se destacan dos métodos de índole distinta:

6.11.- Método de normalización

6.12.- Método del factor de escala

6.11.- Método de normalización

Consiste en hacer para cada variable, el cambio siguiente:

$$x^* = \frac{x}{|x|\ max} = \frac{x}{|V|\ max} \qquad (6.111)$$

De esta forma la nueva variable x', representada idealmente por una fracción de la máxima tensión disponible $|V|max$ (p. ej., $|V|max = 100$ v), alcanzará el valor 1 cuando $x = |x|$ max. En el ejemplo anterior $|X|max = 0,5$ si x es un desplazamiento.

Ejemplo.-

Considerese la ecuación:

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 25x = 0 \qquad (6.112)$$

$$x(0) = 0,66 \text{ m.} \qquad (6.113)$$

$$\dot{x}(0) = -0,23 \text{ m/seg.} \qquad (6.114)$$

y valores máximos estimados:

$$|x| \text{ max} = 0,66 \text{ m} \qquad (6.115)$$

$$|\dot{x}| \text{ max} = 3,3 \text{ m/seg.} \qquad (6.116)$$

$$|\ddot{x}| \text{ max} = 16,5 \text{ m/seg.}^2 \qquad (6.117)$$

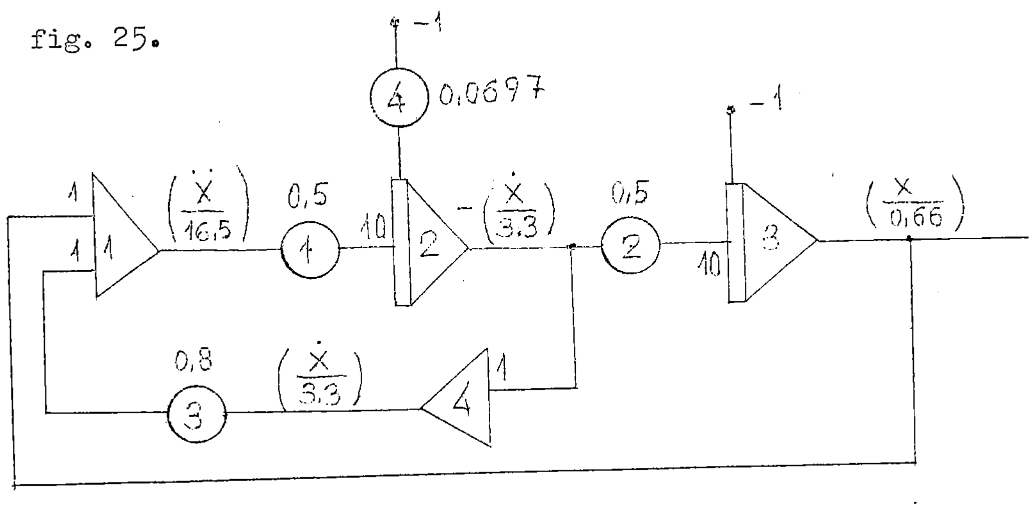
normalizando de acuerdo con (6.111)

$$16,5 \left(\frac{\ddot{x}}{16,5}\right) + 4.3,3 \left(\frac{\dot{x}}{3,3}\right) + 25.0,66 \left(\frac{x}{0,66}\right) = 0 \quad (6.118)$$

$$\left(\frac{\ddot{x}}{16,5}\right) = -0,8 \left(\frac{\dot{x}}{3,3}\right) - \left(\frac{x}{0,66}\right) \qquad (6.119)$$

Las nuevas variables son $x' = \dfrac{x}{0,66}$, $\dot{x}' = \dfrac{\dot{x}}{3,3}$, $\ddot{x}' = \dfrac{\ddot{x}}{16,5}$ con las C.I. $x'(0) = \dfrac{0,66}{0,66} = 1$, $\dot{x}'(0) = \dfrac{-0,23}{3,3} =$ $= -0,0697$.

Un programa para (6.119) está representado en la fig. 25.



-fig 25-

Está figura merece algún comentario. Obsérvese, en primer lugar, que, à la salida de los amplificadores, tenemos las nuevas variables cuyas tensiones no sobrepasan nunca los valores permitidos (siempre que la estimación de $|x|$ max,... sea correcta). Para conseguir esto nos vemos obligados a intercalar potenciómetros entre los amplificadores integradores.

La tensión de referencia aparece simbolizada por ± 1. La ventaja inmediata de este simbolismo y por tanto de este método es que el programa es válido para cualquier equipo, independientemente de las tensiones de referencia del mismo.

La explotación de los resultados del problema simulado implica en general un registro gráfico sobre papel o una visualización de alguna o de todas las variables del problema. Es en esta fase cuando hay que deshacer el cambio de escala graduando los ejes de los gráficos de forma conveniente. Precisamente con objeto de facilitar esta fase posterior de trabajo es aconsejable introducir en la programación unas escalas más cómodas, de valores más redondos. Por ejemplo, en vez de los números (6.115), (6.116) y (6.117) podríamos escoger:

$$|x| \text{ max} = 1\text{m.} \qquad (6.1191)$$

$$|\dot{x}| \text{ max} = 5\text{m/seg.} \qquad (6.1192)$$

$$|\ddot{x}| \text{ max} = 20\text{m/seg.}^2 \qquad (6.1193)$$

Entonces (6.112) se transforma en:

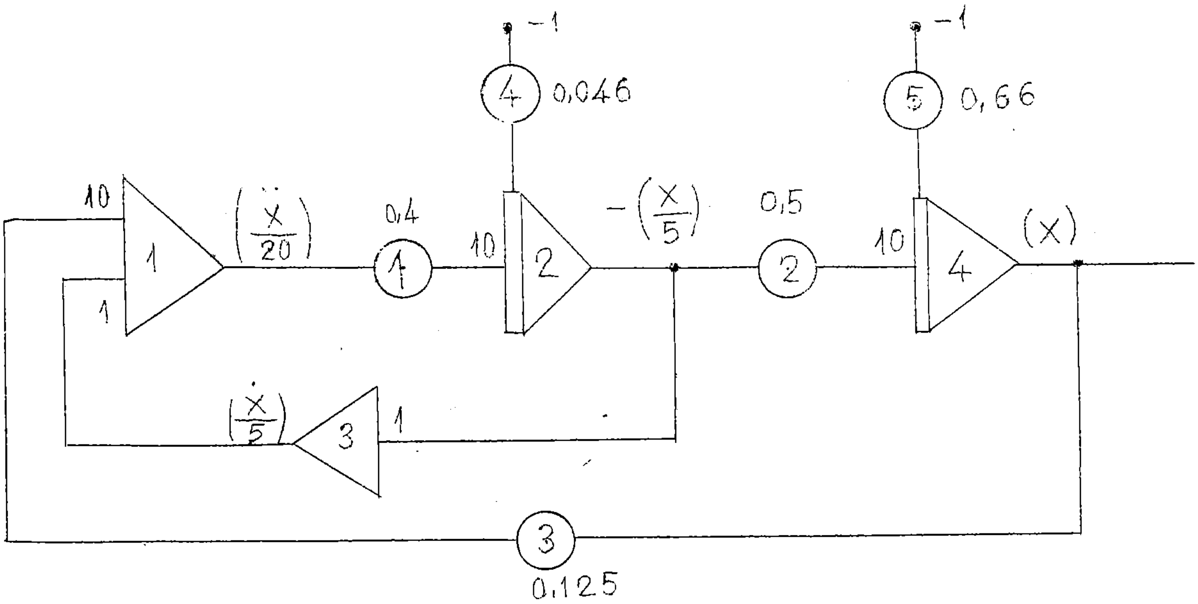
$$20\left(\frac{\ddot{x}}{20}\right) + 4.5\left(\frac{\dot{x}}{5}\right) + 25\,(x) = 0 \qquad (6.1194)$$

$$\left(\frac{\ddot{x}}{20}\right) = -\left(\frac{\dot{x}}{5}\right) - 1{,}25\,(x) \qquad (6.1195)$$

$$x'(0) = \frac{0{,}66}{1} = 0{,}66 \qquad (6.1196)$$

$$\dot{x}'(0) = \frac{-0{,}23}{5} = -0{,}046 \qquad (6.1197)$$

La fig. 26 representa una posible programación de (6.124)



- fig. 26 -

6.12.- <u>Método del factor de escala</u>

Consiste en hacer (para cada variable) el cambio

$$X' = E.x \qquad (6.121)$$

E es el factor de escala, expresado en volt/unidad física. Se escoge, como en el método anterior, en función de los máximos valores:

$$E = \frac{|V|\ max}{|x|\ max} \qquad (6.122)$$

Tomemos otra vez la ecuación (6.112) que vamos a programar por el nuevo método.

$$\ddot{x} + 4\dot{x} + 25x = 0 \qquad (6.112)$$

$$x(0) = 0{,}66\ m. \qquad (6.113)$$

$$\dot{x}(0) = -0{,}23\ m/seg. \qquad (6.114)$$

con los valores máximos estimados en (6.115), (6.116) y (6.117) y redondeados para comodidad en (6.1191), 6.1192) y (6.1193).

Entonces, si suponemos $|V|max = 100$ v.:

$$E_x = \frac{100\ v}{1\,m} = 100\ v/m \qquad (6.123)$$

$$E_{\dot{x}} = \frac{100\ v}{5m/seg} = 20\ v.seg/m \qquad (6.124)$$

$$E_{\ddot{x}} = \frac{100\ v}{20m/seg^2} = 5\ v.seg^2/m \qquad (6.125)$$

$$x' = 100\ x \quad volts. \qquad (6.126)$$

$$\dot{x}' = 20\ \dot{x} \quad volts. \qquad (6.127)$$

$$\ddot{x}' = 5\ \ddot{x} \quad volts. \qquad (6.128)$$

y la ecuación (6.112) se convierte en la (6.129):

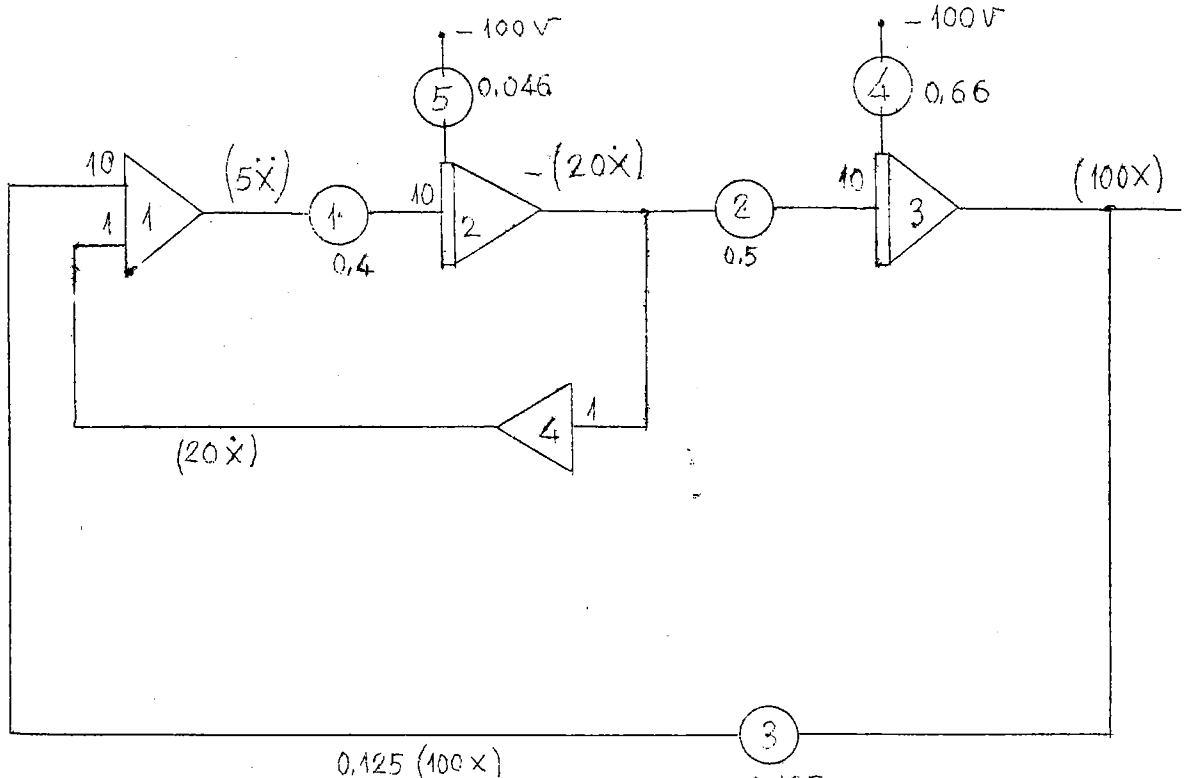
$$(5\ \ddot{x}) = -(20\ \dot{x}) - 1{,}25\ (100\ x) \qquad (6.129)$$

con los valores iniciales

$$x'(0) = 100\ x(0) = 66\ volt \qquad (6.1291)$$

$$\dot{x}'(0) = 20.\dot{x}(0) = -4{,}6\ volt \qquad (6.1292)$$

y el esquema de programación de la fig. 27



- fig 27 -

<u>Observación</u>.- Nótese cómo en las figs. 25, 26 y 27 mantenemos la técnica de obtener a la salida de cada amplificador la variable correspondiente, es decir, en este caso la variable física multiplicada por el factor de escala, pero no por cualquier otro factor o número real.

6.2.- <u>Cambio de la escala de tiempos</u>

La variable independiente del calculador analógico es el tiempo, tiempo del calculador, que llamaremos τ.

Los procesos físicos pueden tener otras variables independientes, pero en estos momentos nos interesamos sólo por aquellos cuya única variable independiente es el tiempo, tiempo físico, que denominamos t.

La mayoría de las veces τ y t son de muy distinto orden de magnitud, como ya se ha indicado en la introducción a este capítulo. El orden de magnitud de τ va ligado de forma íntima a las características del equipo, circuitos y en último término a la instrumentación de salida y explotación de resultados (registradores, voltímetros. .....). Existen dos métodos lógicos de aproximación de los órdenes de τ y t: a) aproximar t a τ; b) aproximar τ a t; ó puesto en forma de títulos de parágrafos:

6.21.- Cambio de escala de tiempos del modelo matemático.

6.22.- Cambio de escala de tiempos del calculador

El factor de escala de tiempos será

$$\beta = \tau / t \qquad (6.21)$$

Entonces:

- Si $\beta > 1$ el tiempo de calculador será superior al tiempo físico y el problema se simula a cámara lenta, por así decirlo.
- Si $\beta < 1$ ocurre lo contrario y la simulación se realiza en tiempo acelerado.
- Si $\beta = 1$ coinciden las dinámicas del proceso y de su simulación.

Observación: tiempo convencional

Todo lo dicho hasta aquí no significa, ni mucho menos, que el tiempo físico deba forzosamente ser expresado en segundos. Puede, p. ej., venir expresado en horas y considerarse que cada unidad τ se corresponde convencionalmente con una hora de evolución del proceso físico.

Si, después de establecer una convención de esta índole, la dinámica no es adecuada para el equipo, es el momento de introducir un factor de escala $\beta = \tau / t$. Esto es lo mismo que decir que cada segundo del calculador equivale a β horas.

6.21.- Cambio de la escala de tiempos del modelo matemático

Si $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$, $\ddot{x} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$, etc.... son las variables que expresan las derivadas sucesivas del modelo, llamaremos $\dot{x}' = \dfrac{dx}{d\tau}$, $\ddot{x}' = \dfrac{d^2x}{d\tau^2}$,.... a las mismas derivadas en tiempo de máquinas.

¿Qué relación existe entre $\dot{x}$ y $\dot{x}'$, entre $\ddot{x}$ y $\ddot{x}'$, etc...?

$$\dot{x} = \left(\frac{dx}{d\tau}\right)\left(\frac{d\tau}{dt}\right) = \dot{x}'\beta \qquad (6.211)$$

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = \left[\frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{d\tau}\right]\left(\frac{d\tau}{dt}\right) =$$

$$= \left[\frac{d\left[\left(\frac{dx}{d\tau}\right)\left(\frac{d\tau}{dt}\right)\right]}{d\tau}\right]\left(\frac{d\tau}{dt}\right) = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2\left[\frac{d\,(dx/d\tau)}{d\tau}\right] \qquad (6.212)$$

pero
$$\frac{d\left(\frac{dx}{d\tau}\right)}{d\tau} = \frac{d^2x}{d\tau^2} = \ddot{x}' \quad \text{y} \quad \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \beta^2$$

Por tanto, (6.212) se escribe finalmente

$$\ddot{x} = \beta^2\ddot{x}' \qquad (6.213)$$

sucesivamente $\dddot{x} = \beta^3\dddot{x}'$, etc.... (6.214)

Nota.- Por comodidad posterior suele escogerse para β algún valor entre las potencias de 10.

Ejemplo.- Sea:

$$7{,}5\,\ddot{x} + 15\,\dot{x} + 1.470\,x = 0 \qquad (6.215)$$

o lo que es igual:

$$\ddot{x} = -\,2\dot{x} - 196\,x \qquad (6.216)$$

con
$$x(0) = -0{,}4 \text{ ms} \qquad (6.217)$$

$$\dot{x}(0) = 2 \text{ m/seg.} \qquad (6.218)$$

y valores máximos extimados

$$|x|\ m = 0{,}4 \text{ m} \qquad (6.219)$$

$$|\dot{x}|\ m = 6 \text{ m/seg.} \qquad (6.2191)$$

$$|\ddot{x}|\ m = 80 \text{ m/seg.}^2 \qquad (6.2192)$$

Un cambio de escala de los tiempos en (6.216) nos llevaría a escribir:

$$(\beta^2 \ddot{x}') = -2\,(\beta \dot{x}') - 196\,x \qquad (6.2193)$$

con valores iniciales y máximos:

$$x\,(0) = -0{,}4 \text{ m} \qquad |x|_m = 0{,}4 \text{ m.} \qquad (6.2194)$$

$$\dot{x}'\,(0) = \frac{2}{\beta} \text{ m/seg.} \qquad |\dot{x}'|_m = \frac{6}{\beta} \text{ m/seg.} \qquad (6.2195)$$

$$|\ddot{x}'|_m = \frac{80}{\beta^2} \text{ m/seg}^2 \qquad (6.2196)$$

Escoger el valor adecuado de β es sencillo en este caso, partiendo de la hipótesis de que nos interesa recoger los resultados gráficamente en un registrador de papel (dispositivo electromecánico lento, de máxima frecuencia entre 1 c/s y 1,5 c/s)

Analizando la ecuación (6.216) puede verse que este modelo describe el comportamiento de un sistema físico de 2º orden, evolucionando libremente a partir de un estado inicial representado por las ecuaciones (6.217) y (6.218). El sistema evoluciona oscilatoriamente con una pulsación natural no amortiguada igual a

$$w_n = \sqrt{\frac{196}{1}} = 14 \text{ rad/seg, equivalente a } 2{,}2 \text{ c/s.}$$

Este valor sobrepasa la capacidad de seguimiento del citado registrador, por lo que, si se desea observar con cierta fidelidad el fenómeno, es preciso decelerar la simulación del mismo. $\beta = 10$ es un factor aceptable ya que reduce w_n a 0,22 c/s, situada en un favorable margen de trabajo del registrador.

Sustituyendo en (6.2193) obtenemos la relación

$$(10^2\,\ddot{x}') = -2\,(10\,\dot{x}') - 196\,x \qquad (6.2197)$$

$$\ddot{x}' = -\,0{,}2\,\dot{x}' - 1{,}96\,x \qquad (6.2198)$$

y los valores

$$x\,(0) = -0{,}4\ ;\ \dot{x}'(0) = 0{,}2\ ;\ |x|_m = 0{,}4\ ;\ |\dot{x}'|_m = 0{,}6\ ;$$
$$|\ddot{x}'|_m = 0{,}8.$$

Para completar la preparación del problema falta realizar el cambio de escala de las amplitudes, utilizando p. ej. el método de normalización. Para ello redondeamos:

$$|x|_m = 0{,}5 \;;\; |\dot{x}'|_m = 1 \;;\; |\ddot{x}'|_m = 1 \qquad (6.2199)$$

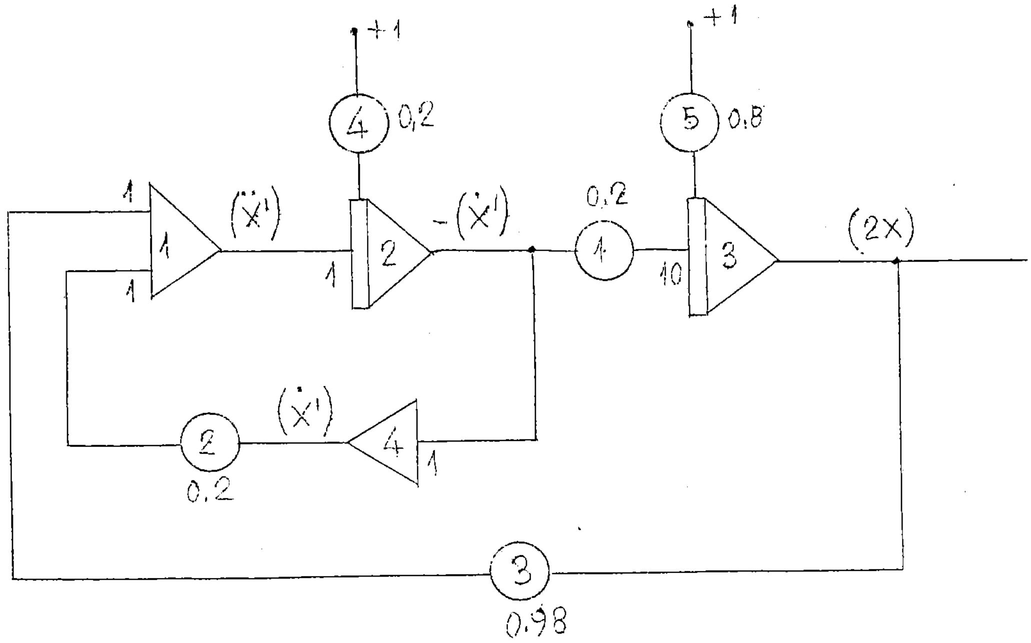
$$(\ddot{x}') = -0{,}2\,(\dot{x}') - 0{,}98\,(2x) \qquad (6.21991)$$

o sea:

$$\ddot{x}'' = (\ddot{x}') = \frac{1}{100}\,\ddot{x} \qquad (6.21992)$$

$$\dot{x}'' = (\dot{x}') = \frac{1}{10}\,\dot{x} \qquad (6.21993)$$

$$x'' = (2x) = 2x \qquad (6.21994)$$



- fig. 28 -

Observaciones

a) En la fase de explotación de los resultados es muy importante tener presente todas las relaciones de cambio de escala en el ejemplo anterior (6.21 992), (6.21993) y (6.21994).

b) Para no verse obligado a rehacer las escalas en amplitud es conveniente establecer en primer lugar el cambio de escala de tiempos.

6.22.- Cambio de la escala de tiempos del calculador

El cambio de escal en el calculador consiste en modificar las constantes de tiempo de todos los integradores por un factor β . Dos formas posibles : (a) multiplicando la ganancia del integrador por $\frac{1}{\beta}$ o (b) multiplicando un coeficiente potenciométrico previo al integrador por $\frac{1}{\beta}$. Cualquiera de las dos soluciones es funcionalmente lo mismo que multiplicar la ganancia del amplificador por $\frac{1}{\beta}$. La primera es una modificación de la resistencia de entrada del amplificador integrador - (ec. 3.55) y la 2ª se realiza por medio de una atenuación. En la práctica se utilizan los dos efectos combinados.

Si $\beta > 1$ las ctes. de tiempo quedan aumentadas y se ralentiza el funcionamiento. Si $\beta < 1$ las ctes. de tiempo se reducen y la operación es más rápida.

6.23.-<u>Existencia de funciones de tiempo</u>

La existencia de funciones de tiempo, externas o no, en el esquema de programación debe provocar en el programador un movimiento de precaución al efectuar el cambio de escala, bien porque haya que modificar la escala de dichas funciones, bien - porque conviene cuidar la interpretación de los resultados obtenidos.

7.- MULTIPLICACION Y GENERACION DE FUNCIONES

Para completar el cuadro de las operaciones necesarias, de que se hablaba en el capítulo 1, hay que contar con las operaciones de representación de funciones del tiempo o de otra variable y de multiplicación de dos funciones de tiempo o de otra variable cualquiera.

En las figuras 2, 18, 19, 20, y 22 se simboliza la utilización de funciones tales como sen 3 x_2, $f(t)$, e^{-t}, sen t, y de lòs productos $x_1 \cdot x_2$, $y \cdot e^{-t}$ e y_1^2. En todo calculador moderno se dispone de estas facilidades que, en general van asociadas a dispositivos de computación de mayor complejidad que los tratados en el capítulo 3. Debido a ello se describen aquí de forma somera, sin entrar en los detalles técnicos, con un objetivo orientado hacia la programación.

- - - - -

7.1.- MULTIPLICACION DE DOS FUNCIONES O VARIABLES

En páginas anteriores hemos vènido haciendo uso del símbolo de programación correspondiente a la multiplicación de dos variables. Detrás de este símbolo genérico se esconden varios tipos de dispositivos, que pueden dividirse fundamentalmente en:

7.11 - Electromecánicos: servomultiplicador

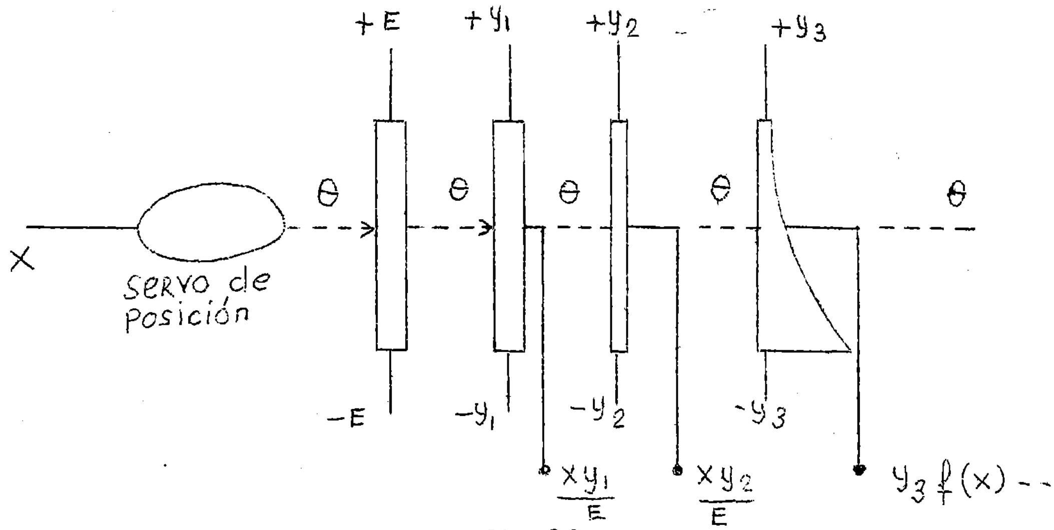
7.12 - Electrónicos:
- multiplicador por doble modulación de impulsos
- multiplicador, denominado de "un cuarto de los cuadrados"

Los primeros suelen utilizarse en conexión con variables de variación lenta o en funcionamiento manual del calculador, mientras que los segundos son útiles con variaciones más rápidas o en régimen de funcionamiento repetitivo.

- - - - -

7.11.- EL SERVOMULTIPLICADOR

Esquemáticamente es un servomecanismo, el eje de cuyo motor es solidario al cursor de uno o varios potenciómetros circulares con 4 dontactos: a) el propio cursor; b) otro, normnalmente el punto medio, a masa y c)d) para conectar parejas simétricas de tensiones (+E, -E), ($+y_1$, $-y_1$), ($+y_2$, $-y_2$) etc. Las tensiones de salida se toman entre el cursor y la masa.



-fig.29-

El 1^{er} potenciómetro es el de realimentación (E, tensión cte.) que permite al servo llevar el cursor a una posición que se traduce en una tensión proporcional a la variable de entrada X.

Las tensiones y_1, y_2 etc,... son señales variables y la salida de cada potenciómetro es una tensión variable proporcional al producto xy_1, xy_2,. La cte. de proporcionalidad es 1/E, donde E puede ser, según los equipos, de 100 v., 50 v., 10 v.

En la figura 29 el potenciómetro de ($+y_3$, $-y_3$), de arrollamiento especial, traduce la posición del cursor como una tensión función no lineal de X.

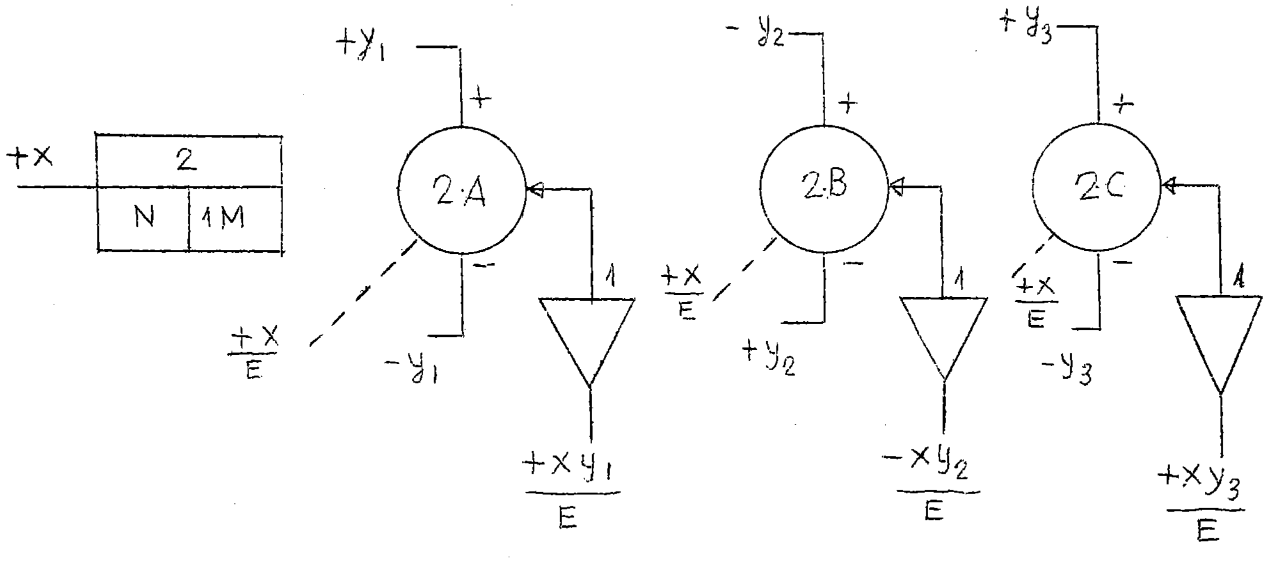
La rapidez de tal dispositivo viene determinada por un ancho de banda de muy pocos ciclos/seg (en el mejor de los casos) o, lo que es lo mismo, por la cte de tiempo del motor.

Esta limitación se refiere sólo a la variable X.

Una ventaja importante es que puede ejecutar simultáneamente los productos de una variable por otras varias.

La figura 30 representa otro símbolo de uso corriente cuando se quiere particularizar un servomultiplicador en un diagrama de programación.

De las diferentes casillas, 2 significa el nº de orden del servo multiplicador, N significa el llamado montaje normal con +Evolt, -E volt. aplicados al potenciómetro de realimentación y 1M significa una resistencia de 1M entre el cursor y masa que, junto con un amplificador inversor realimentado con 1M anulan los errores de carga en el potenciómetro, Los nºs. 2A, 2B, 2C,... clasifican a los potenciómetros multiplicativos A,B,C asociados al servo Nº 2.



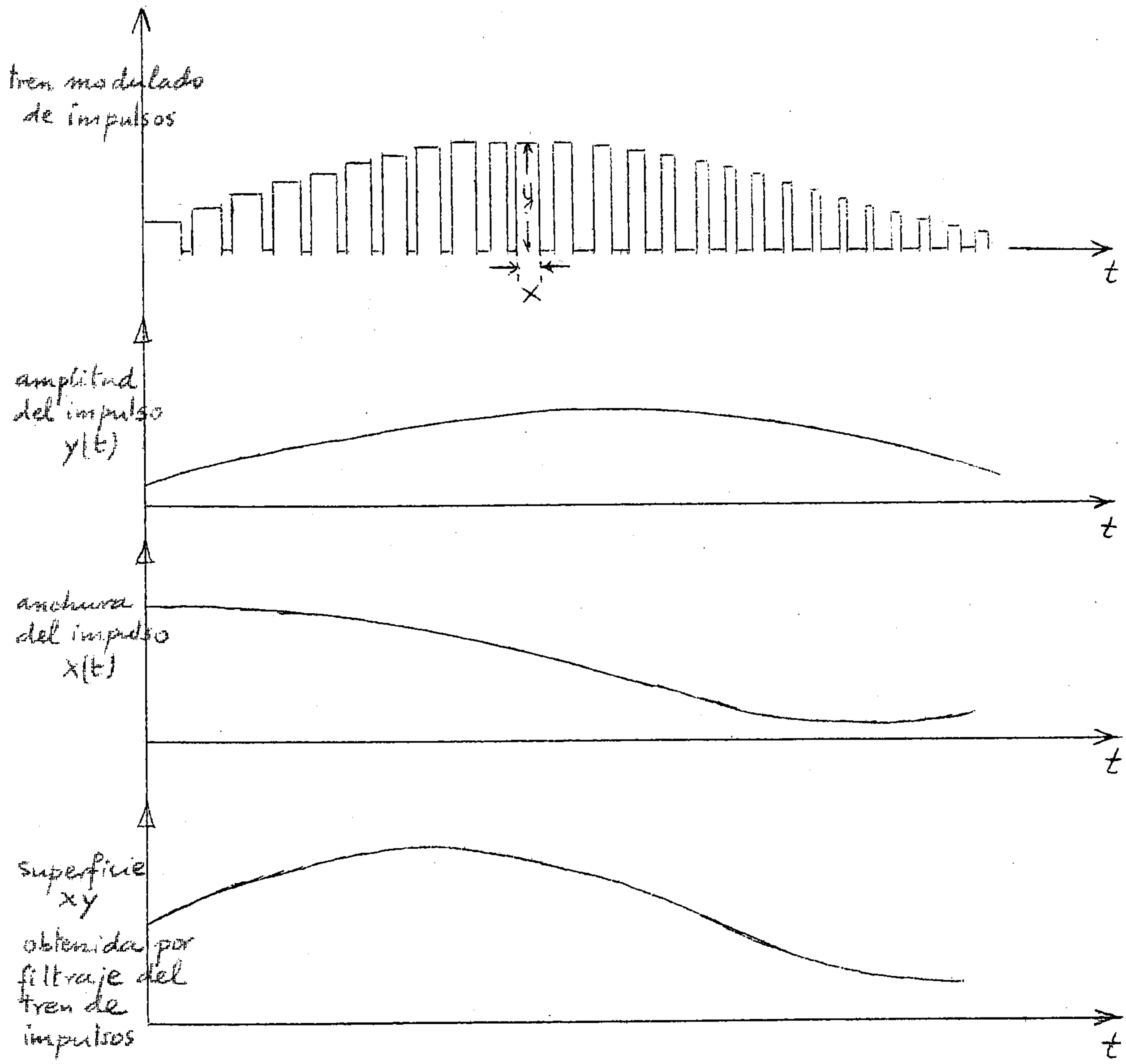
-fig.30-

7.12.- MULTIPLICADORES ELECTRONICOS

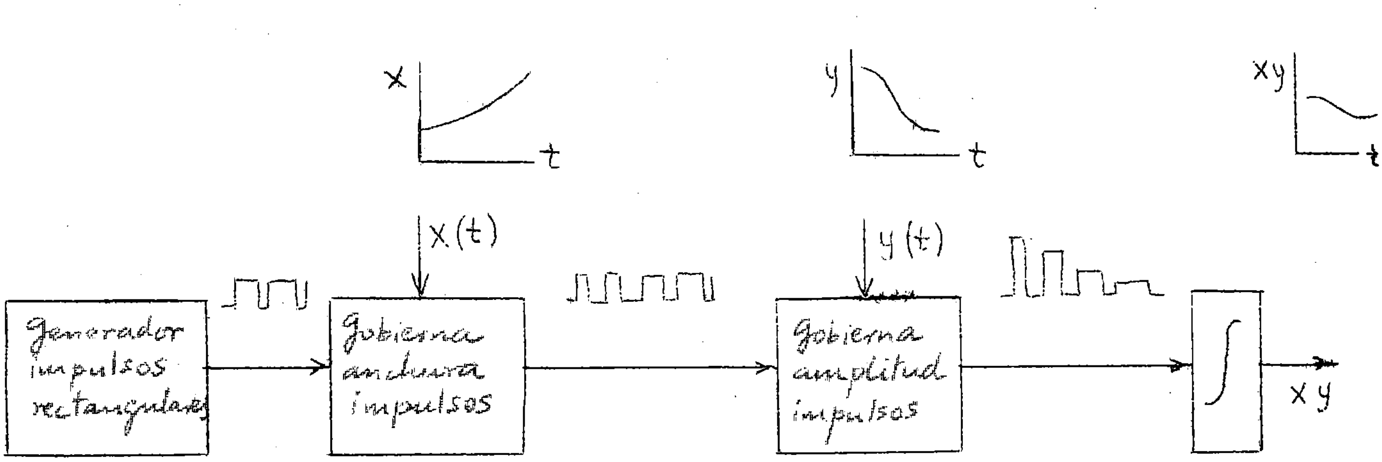
7.121.- MULTIPLICADOR POR DOBLE MODULACION DE IMPULSOS.-

El principio de esta operación lo tenemos en las figuras. 31 y 32.

Los impulsos rectangulares pueden ser de una frecuencia de varios Kc/s mientras que x e y deben variar lentamente, en comparación. El fabricante indica en su manual las características y limitaciones de cada uno de estos dispositivos.


tren modulado de impulsos
y
x
t
amplitud del impulso y(t)
t
anchura del impulso x(t)
t
superficie xy obtenida por filtraje del tren de impulsos
t

-fig.31-


x
t
y
t
xy
t
x(t)
y(t)
Generador impulsos rectangulares
Gobierna anchura impulsos
Gobierna amplitud impulsos
x y

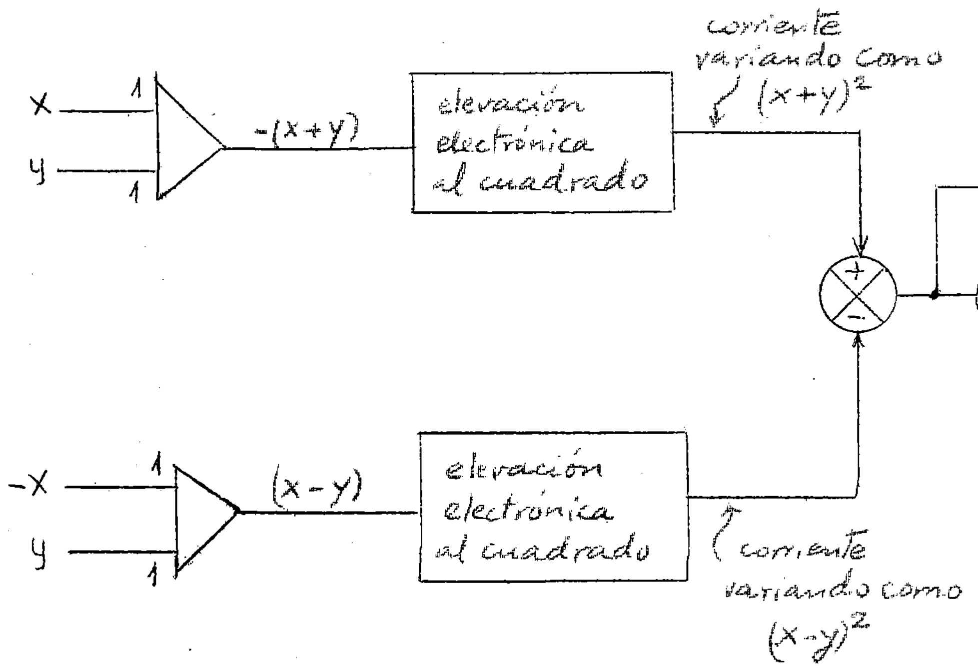
-fig32-

7.122.- MULTIPLICADOR DE "UN CUARTO DE LOS CUADRADOS"

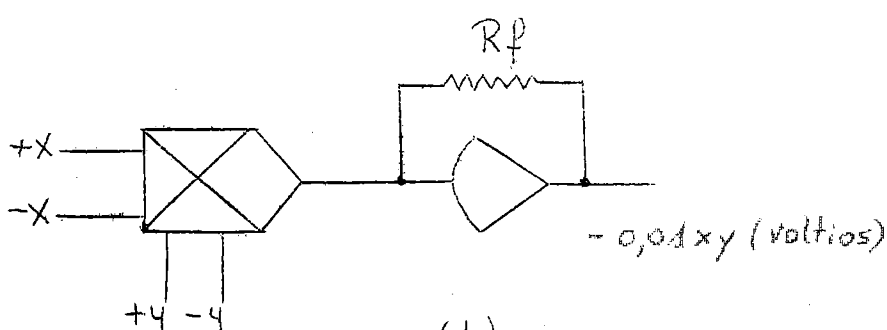
Se basa en la siguiente relación matemática.

$$xy = 1/4 \left[(x + y)^2 - (x - y)^2 \right] \qquad (7.1221)$$

y se realiza con circuitos basados en el diagrama de bloques de la fig33(a).



(a)



(b)

-fig. 33-

En general para elevar al cuadrado una tensión, utilízase un circuito a diodos que produce una corriente proporcional al cuadrado de la tensión de entrada. La diferencia de estas corrientes se lleva directamente a un amplificador operacional que, realimentado por una resistencia R_f dictada por el fabricante, convierte la variación de corriente en la adecuada variación de voltaje (en la figura : -0,01 xy).

7.2.- GENERACION DE FUNCIONES DE UNA SOLA VARIABLE

Puede hacerse una primera clasificación de los procedimientos constructivos con arreglo a su flexibilidad:

a) generación de funciones variables

a1) con diodos

a2) con potenciómetros de tomas intermedias

a3) con seguidores de curvas, tipo registrador xy, preparados al efecto.

Este tipo de generadores, del que no hablaremos, produce tensiones que varían a la medida de nuestros deseos.

b) generación de funciones fijas.

b1) por instrumentación "ad hoc" externa o incorporada al calculador, cuando se trata de funciones de uso más que corriente, como senos o cosenos , ondas rectangulares o en rampa, x^2, etc...

b2) por integración programable de ecuaciones diferenciales con los elementos del propio calculador.

b3) por circuitos especiales con diodos polarizados (funciones discontinuas)

Aquí se van a considerar brevemente los casos b2) y b3), de generación de funciones explícitas de una sola variable.

- - - - -

7.21.- GENERACION DE FUNCIONES POR INTEGRACION DE LA ECUACION DIFERENCIAL CORRESPONDIENTE.-

El procedimiento de trabajo consiste en lo siguiente: dada una función de una variable (p.ej. $y = a \operatorname{sen} t$) encontrar la ecuación diferencial ($\ddot{y} + \omega^2 y = 0$) que, integrada, da como solución la función anterior. He aquí las condiciones que debe satisfacer la función considerada:

1º. La función y sus derivadas, hasta el orden de la ecuación diferencial, han de ser contínuas.

2º. Las derivadas han de poder calcularse.

La forma práctica de obtener la ecuación diferencial es la de derivar la función tantas veces como sea necesario para formarla.

Una vez obtenida la ec. diferencial se simula con los elementos del calculador.

- - - - -

7.211.- Ejemplos

7.2111. Función seno o coseno.- Sea la función $y = a \operatorname{sen} \omega t$ (7.2111)

Diferenciando:

$$\dot{y} = a\,\omega \cos \omega t \tag{7.2112}$$

$$\ddot{y} = -a\,\omega^2 \operatorname{sen} \omega t = -\omega^2 y$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{7.2113}$$

Si pretendemos generar $y = a \cos \omega t$,

$$\dot{y} = -a\,\omega \operatorname{sen} \omega t \tag{7.2114}$$

$$\ddot{y} = -a\,\omega^2 \cos \omega t = -\omega^2 y$$

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0 \tag{7.2115}$$

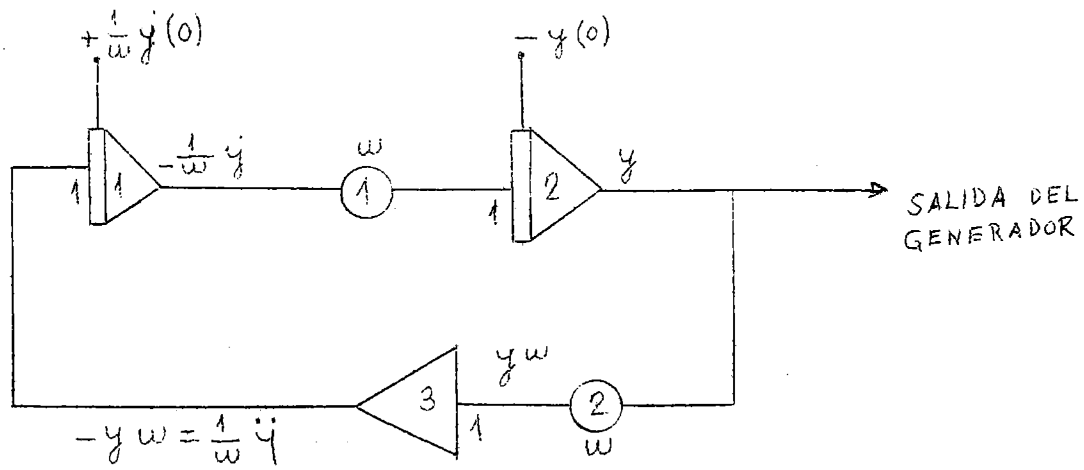
Las ecuaciones (7.2113) y (7.2115) son idénticas, pero lo que cambia para obtener un resultado u otro son las condiciones iniciales. En el primer caso:

$$\text{función seno} \begin{cases} y(0) = 0 \\ \dot{y}(0) = a\,\omega \end{cases}$$

En el segundo caso:

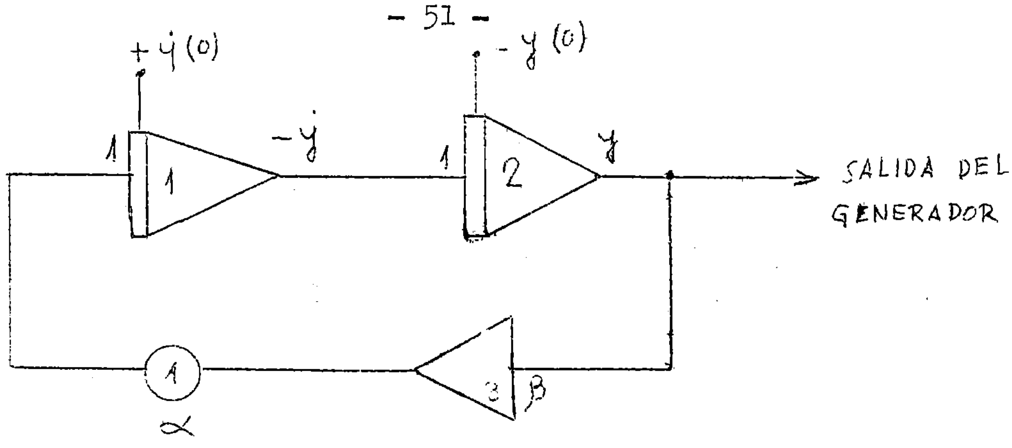
$$\text{función coseno} \begin{cases} y(0) = a \\ \dot{y}(0) = 0 \end{cases}$$

Esto es lo mismo que decir que la solución general de (7.2113) ó (7.2115) es $y = C_1 \operatorname{sen} \omega t + C_2 \cos \omega t$, y que un programa como el de la figura 34 (si fuera factible desde el punto de vista del material) genera una función senoidal si $-\frac{1}{\omega}\dot{y}(0) = -a$, $y(0) = 0$; genera una función cosenoidal cuando las C.I. en los integradores 1 y 2 son respectivamente :



-fig.34-

$-\frac{1}{\omega}\dot{y}(0) = 0$, $y(0) = a$; otro posible programa (fig 35)



-fig 35-

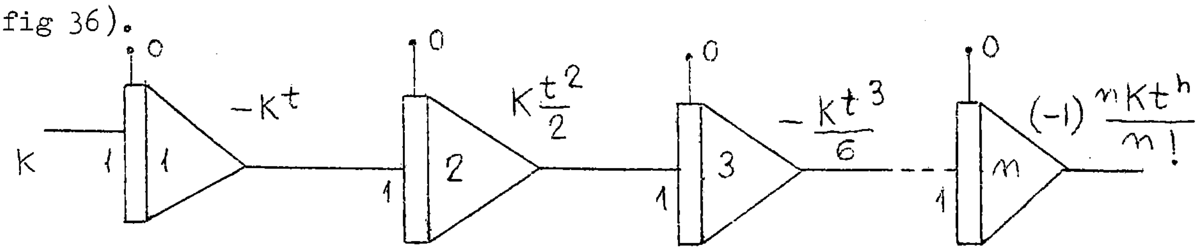
con $-\dot{y}(0) = -a\omega$, $y(0) = 0$; $-\dot{y}(0) = 0$, $y(0) = a$ respectivamente y $\beta\alpha = \omega^2$

- - - - -

7.2112.- OBTENCION DE POTENCIAS DEL TIEMPO

El método más conveniente utiliza una cascada de integradores operando sobre una entrada constante.

El nº necesario de integradores es igual al exponente de la potencia del tiempo que interesa generar. Todas las condiciones iniciales son nulas (fig 36).



-fig 36-

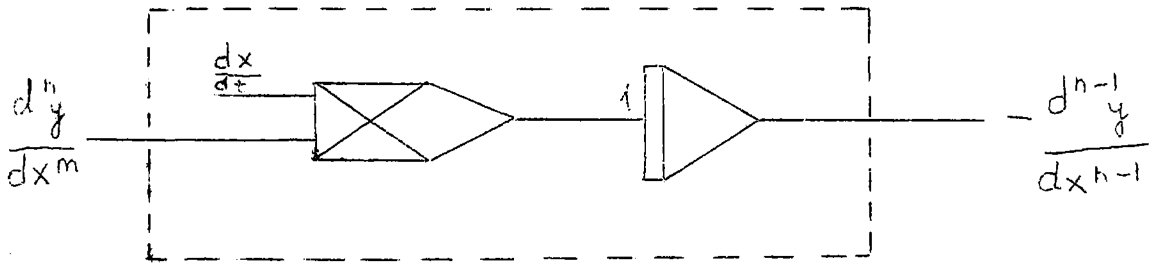
- - - - -

7.22.- GENERACION DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE DEPENDIENTE. INTEGRACION GENERALIZADA.

Muy a menudo es preciso generar funciones de variables distintas del tiempo, pero que dependen de él. Esto lleva a generalizar la operación de integración en la forma siguiente:

$$\frac{d^{n-1}y}{d\,x^{n-1}} = \int \frac{d^n y}{d\,x^n}\,dx = \int\left(\frac{d^n y}{d\,x^n}\cdot\frac{d\,x}{d\,t}\right)dt$$

que puede programarse como en la figura 37, donde la parte situada dentro de las líneas de trazo representa un integrador respecto de la variable X.



-fig.37-

- - - - -

7.221.- EJEMPLO: GENERACION DE UNA ONDA MODULADA EN FRECUENCIA

Sea la función $y = \text{sen}\ (\omega_o t + a\ \text{sen}\,\omega_1 t)$ ecuación de una onda - modulada en frecuencia.

Llamamos:

$$x = \omega_o t + a\ \text{sen}\,\omega_1\ t \qquad (7.2211)$$

$$dx/dt = \omega_o + a\ \omega_1\ \cos\omega_1 t \qquad (7.2212)$$

$$y = \text{sen}\ x \qquad (7.2213)$$

De acuerdo con el esquema 37 es preciso generar primero la función dx/dt, mediante el esquema de la figura 38(a). El esquema 38(b) termina la simulación de una onda modulada en frecuencia.

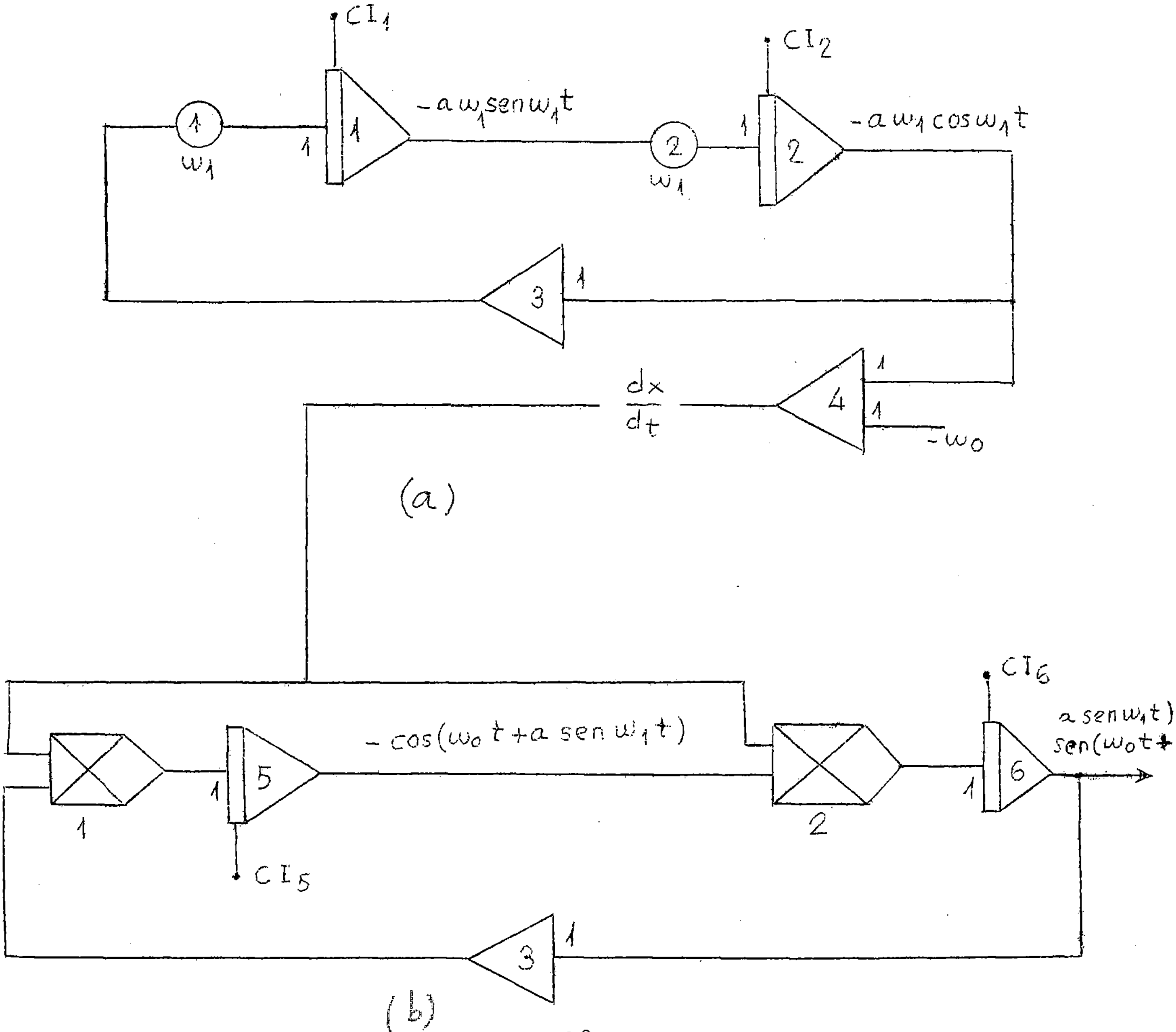
Las condiciones iniciales son:

$CI_1 = 0$

$CI_2 = a\,\omega_1$

$CI_5 = 1$

$CI_6 = 0$



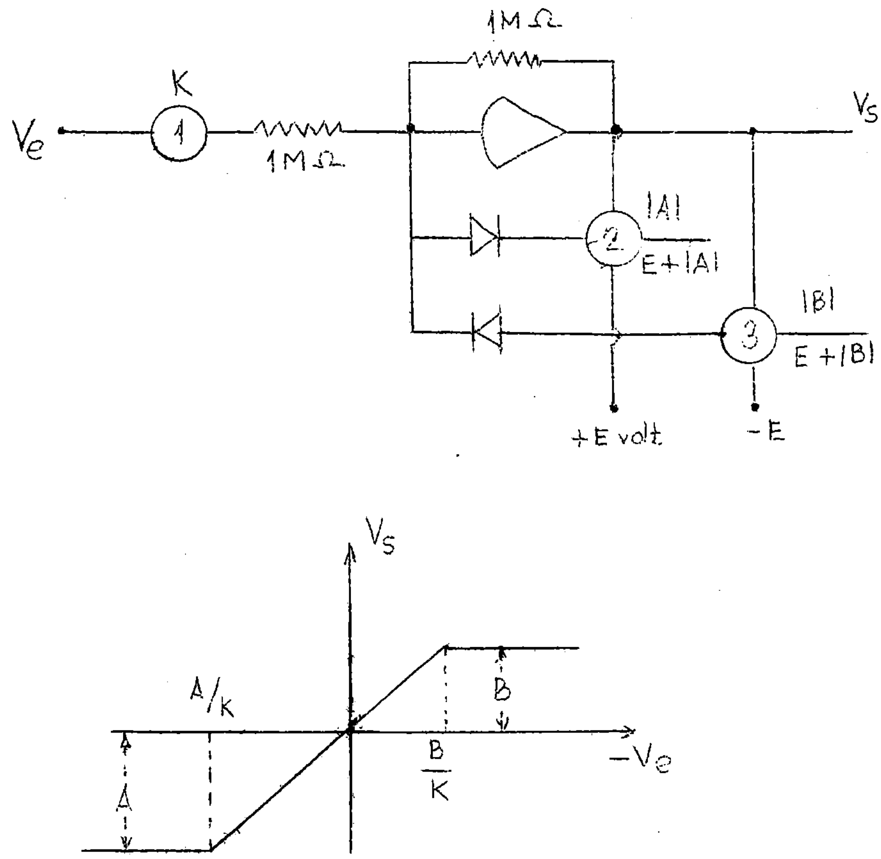
-fig 38-

7.23.- GENERACION DE FUNCIONES DISCONTINUAS MEDIANTE DIODOS POLARIZADOS

Un par de ejemplos ilustrará, mejor que toda explicación, la forma de trabajo de este tipo de generadores.

7.231.- CIRCUITO QUE SIMULA UNA SATURACION (limitador)

En la fig . 39 se representan el circuito y el comportamiento del mismo(tensión de salida en función de la tensión de entrada, análogos de las magnitudes físicas asociadas al fenómeno de saturación).



-fig. 39-

En rigor, la pendiente de la curva, en la zona de saturación no **es nula**; puesto que ni el diodo ni el atenuador presentan nunca impedancia nula. No obstante, su valor, frente a 1MΩ que tiene en paralelo el amplificador cuando los diodos no conducen, puede despreciarse.

Los potenciómetros 2 y 3 gobiernan los valores de la tensión de saturación, respectivamente $V_s = -A$; $V_s = + B$. El potenciómetro 1 gobierna la pendiente en la parte lineal.

En el caso ideal, la relaciones entrada/salida pueden escribirse:

$$V_e < -\frac{B}{k} \longrightarrow V_s = + B \qquad (7.2311)$$

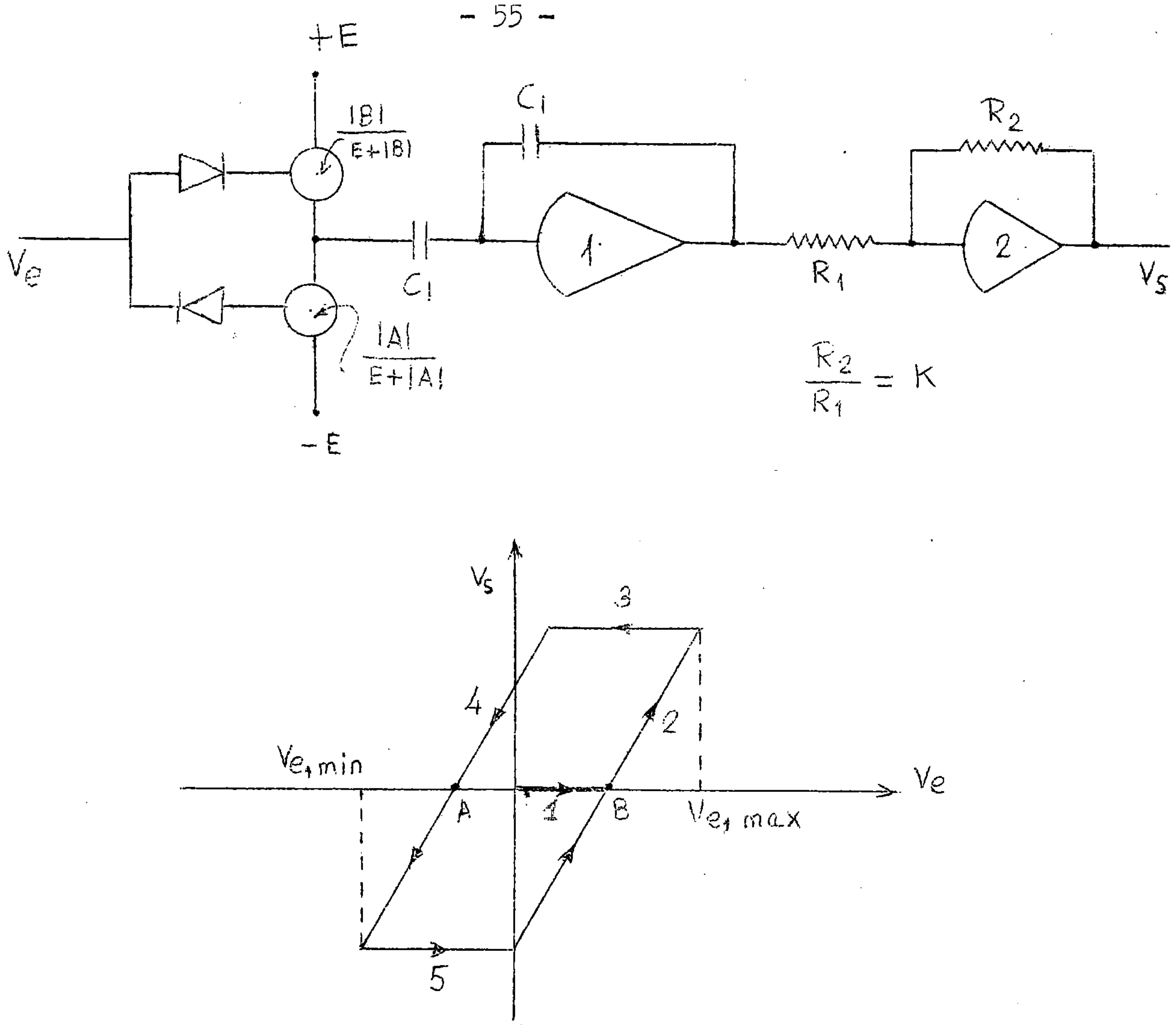
$$-\frac{B}{k} < V_e < +\frac{A}{k} \longrightarrow V_s = - k\,V_e \qquad (7.2312)$$

$$V_e > +\frac{A}{k} \longrightarrow V_s = - A \qquad (7.2313)$$

- - - - -

7.232.- CIRCUITO QUE SIMULA UN CICLO DE HISTERESIS

(Ver fig. 40) E es siempre la tensión de referencia en el calculador.



-fig.40-

Existen tablas de circuitos programados que generan funciones discontínuas y otros que generan funciones del tiempo o de otra variable dependiente: $V_s = \sqrt[3]{V_e}$; $V_s = tg.\ V_e$; $V_s = e^{-kV_e}$; $V_s = \ln V_e$; etc.... que podríamos llamar "rutinas" por similitud con las que utilizan los calculadores digitales.

- - - - -

7.3.- CAMBIOS DE ESCALA EN OPERADORES NO LINEALES

Deliberadamente se ha omitido en este capítulo el tratamiento de los cambios de escala. Hay que tener en cuenta que todo él se refiere a sistemas no lineales o, en el mejor de los casos, a operadores lineales (apartado 7.21) que generan funciones que pueden utilizarse posteriormente en operaciones no lineales ($y \cdot e^{-t}$, y_1^2, etc...) Dado que las operaciones no lineales son todas aquellas que no son lineales y para las cuales no existe teoría - unificada, sino teorías particularizadas a clases determinadas de problemas, es forzoso establecer que el cambio de las escalas para un calculador analógico es también, en todo momento, un problema particular, no sistematizable.

8.- EL CALCULADOR ANALOGICO DE CORRIENTE CONTINUA

A lo largo de los capítulos anteriores se ha hablado de elementos de computación, lineales y no lineales, de algunas de las características de éstos, y sobre todo de programación y de los problemas que ésta plantea en función de aquellos elementos. En otras palabras, hemos des crito los principios del cálculo analógico.

Este capítulo presenta un conjunto de datos de realización y utilización práctica de los calculadores analógicos de corriente contínua.

8.1.- DISTRIBUCION FUNCIONAL

Puede decirse que, funcionalmente, un calculador analógico consta de cuatro partes:

- energía
- órganos de computación
- control
- órganos de entrada de datos y de salida y explotación de los resultados.

La presentación material de todo el disposotivo permite la flexibilidad de conectar los elementos de computación de acuerdo con un determinado programa. La apariencia externa es la de una consola donde, agrupados por determinadas afinidades, están, fácilmente identificables, los terminales de todos los elementos disponibles. Estos terminales pueden conectarse mediante
cableado y una ventaja de los modernos calculadores es que tal
cableado puede ejecutarse tranquilamente sobre un panel móvil llamado "panel de programación", que se conecta directamente en la parte correspondiente de la consola.

Esto permite una gran libertad en el caso de la máquina y, más que otra cosa, una optimización del tiempo de cálculo.

\- - - - -

8.11.- ENERGIA

Se refiere al suministro de la alimentación muy estabilizada para todo el conjunto, de las tensiones de referencia ($\pm$ 100 v. ; $\pm$ 10 v. según los equipos) y de las tensiones para el establecimiento de las condiciones iniciales en los integradores.

\- - - - -

8.12.- ORGANOS DE COMPUTACION

Se refiere al conjunto de amplificadores operacionales, multiplicadores, generadores de funciones y atenuadores. Resistencias y capacidades se tienen como elementos sueltos, enchufables en el panel de programación.

Suele decirse que la dimensión de un calculador anlógico es el nº de sus amplificadores operacionales y ésta puede oscilar entre 6 y 500 aproximadamente.

- - - - -

8.13.- CONTROL

Contiene al menos los siguientes modos:

- Interrupción general (off)

- Operación (Compute), restitución (reset), mantenimiento (hold) de que ya se habló en el apartado 3.51.

- Alta tensión suprimida (standby)

- Referencia suprimida (reference off) que desconecta la tensión de referencia del panel de cálculo.

- Ajuste de atenuadores (pot set), que retituye todos los integradores y conecta a masa todos los amplificadores para evitar sobrecargas, mientras se ajustan los coeficientes a los valores establecidos en la hoja de programa.

- Funcionamiento repetitivo

- Sistema de alarma de sobrecarga en los amplificadores. Una lamparita de neón se enciende por cada amplificador donde se sobrepasa una determinada tensión, lo que indica que hay que aumentar la escala de alguna magnitud. La instalación puede tambien contar con un sistema completo de alarma, que avisa al operador al tiempo que detiene los cálculos, conmutando los integradores a la posición de mantenimiento (hold)

- Indicador de todo lo contrario; muestra al operador que un amplificador no ha sobrepasado a lo largo de los cálculos un porcentaje del rango total, lo que aconseja un nuevo cambio de escala en el programa.

- Existen o pueden existir controles del funcionamiento de los integradores, de la suficiencia o insuficiencia del ancho de banda de los servos en operación, etc...

- Servoajuste de los atenuadores.

Existe en modo manual o en modo automático, mediante cinta perforada, donde se indica la secuencia de valores de los coeficientes con un código de identificación de los potenciómetros correspondientes. En ambos casos un servosistema toma a su cargo el ajuste de los coeficientes con un error p. ej., de un 0,02 por ciento de la escala total.

- Servoajuste de los generadores de función variable.

Todos estos modos que se acaban de enunciar someramente constituyen - es fácil de imaginar - un complicado sistema de conmutación. La tendencia actual, para los grandes equipos analógicos utilizados en investigación, es la de dotarlos de un complementario sistema lógico de decisión que se ocupe, en función de las circunstancias, de la gestión de las funciones de control.

Esta gestión puede llegar, llega en algunos casos, a la producción automática de secuencias de cálculos con cambios en los valores de coeficientes y condiciones iniciales previamente programados.

- - - - -

8.14.- ENTRADA DE DATOS

Los datos son fundamentalmente, los valores de los coeficientes de los atenuadores, los valores iniciales de los integradores y la preparación de determinadas funciones que intervengan en el programa.

Todas estas operaciones están facilitadas en la consola del calculador mediante los cuadros correspondientes de mandos potenciométricos, etc. em combinación con alguno de los modos de control manual, automático o semiautomático, según los equipos.

La salida de resultados, por su importancia merece un párrafo aparte.

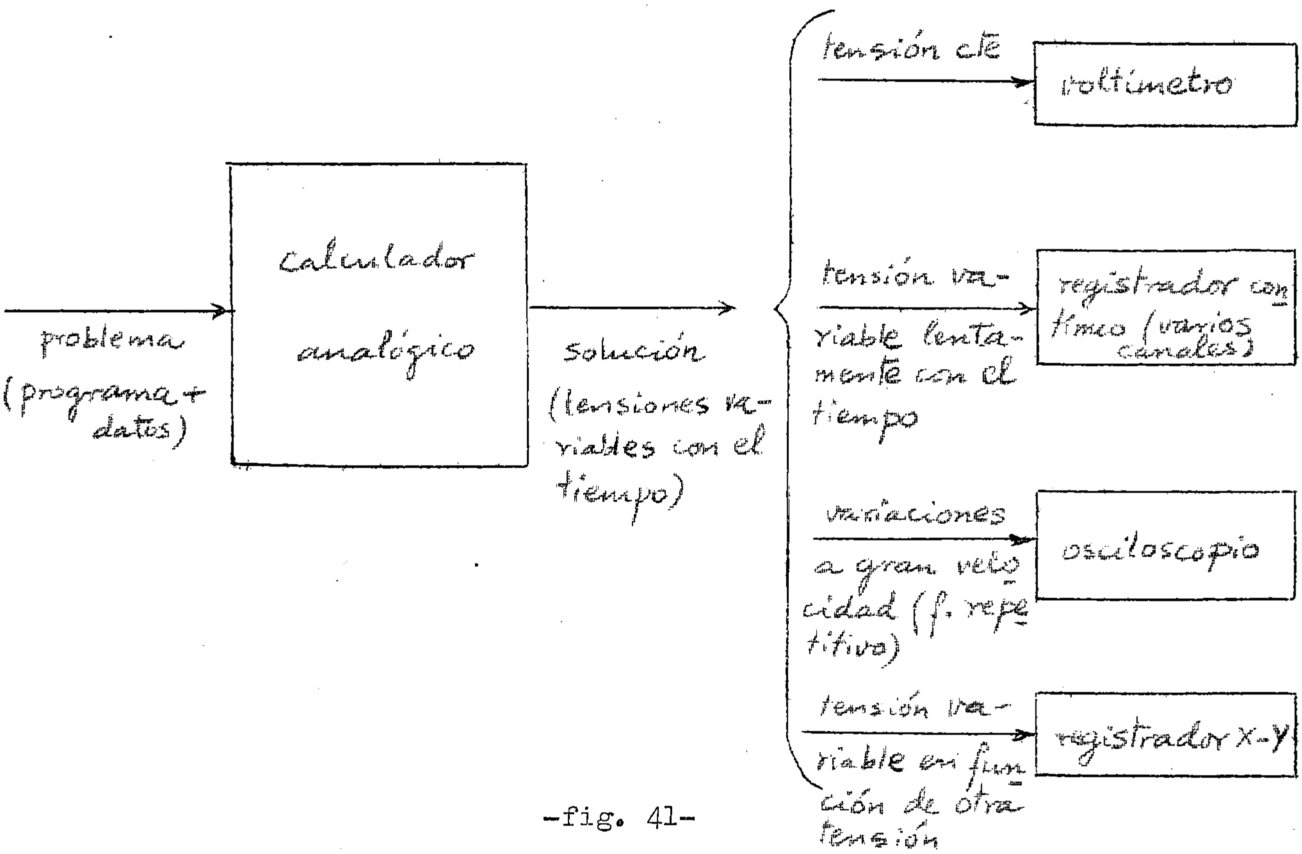
- - - - -

8.2.- DISPOSITIVOS DE SALIDA Y EXPLOTACION DE LOS RESULTADOS

Sabemos que los resultados de cálculo o simulación son voltajes eléctricos que representan cantidades relacionadas con variables físicas. Es necesario poder medir, leer y registrar o visualizar estos voltajes. Es la fase última en la cadena constituída por el estudio, programación, conexionado y ejecución de la simulación de un modelo matemático; pero es un escalón importante en cuanto a la fiel recogida o interpretación de la solución.

Existen los siguientes dispositivos:

- voltímetro analógico o numérico.
- registrador de papel contínuo
- registrador X - Y
- osciloscopio



-fig. 41-

No hay que olvidar nunca que a la salida del dispositivo no tenemos la solución sino una transformación de la misma, con los errores del propio dispositivo incorporados.

Es decir, en función de la solución o de la finalidad de la misma se escoge el dispositivo adecuado y, una vez utilizado, hay que interpretar los resultados conociendo perfectamente sus características. Enunciemos algunas de estas características cualitativas.

a) Voltímetro

Analógico o numérico (normalmente este último) viene integrado en el calculador. Se utiliza para numerosos tests estáticos y también para medir las tensiones si se detiene la ejecución de los cálculos.

No sirve para observar el comportamiento dinámico de la solución.

b) Registrador contínuo

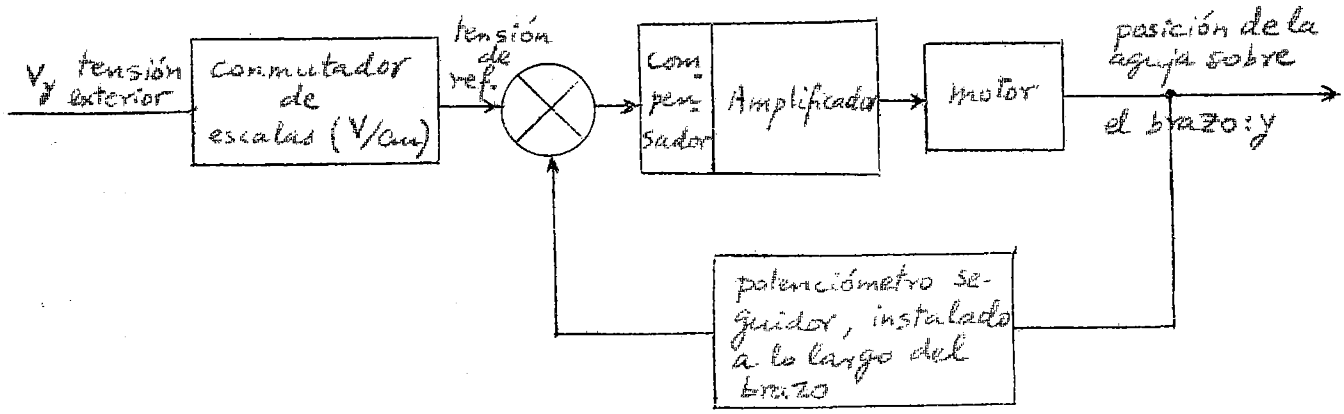
De uno de varios canales, utilizan un rollo de papel que se mueve a una velocidad cte. (a menudo entre varias posibles), que representa a la variable independiente, mientras una aguja/canal inscribe una curva correspondiente a las variaciones de la tensión conectada.

Muy utilizada para registrar soluciones de variación lenta, como son las de la mayoría de los procesos industriales.

c) Registrador X - Y

Es un instrumento muy útil, electromecánico y por tanto válido para reflejar soluciones lentas (menos de 2 c/s de freduencia máxima). Permite obtener la curva de una tensión en función de otra.

Se llama X - Y porque tiene dos entradas, a semejanza de un osciloscopio, si bien aquí las desviaciones X e Y se producen a través de un servomecanismo de posición. Una aguja entintada se desplaza a lo largo de un brazo (verticalmente) una longitud proporcional a la tensión de una de las dos magnitudes. El brazo, a su vez, se desplaza horizontalmente una longitud proporcional a la otra magnitud. Sobre una hoja de papel, convenientemente fija y graduada, queda una traza cuando la pluma, el brazo o ambos se mueven.



-fig. 42-

El esquema de principio es el de todo servo (fig 42) y en este caso es importante, al menos, saber que los servos de aguja y de brazo tienen las mismas características de rapidez y precisión, a pesar de la diferencia de masas e inercia. Es cuestión de diseño.

d) Osciloscopio

Para soluciones que varían rápidamente y también para visualizar la variación de las tensiones de un calculador, cuando se opera éste en modo repetitivo.

Puede fotografiarse la figura obtenida en el tubo de imagen. Por su dificultad de calibración es bastante menos preciso que el registrador X-Y, pero pueden utilizarse complementariamente, el primero para ajustes de los parámetros y coeficientes del problema, fundionando en modo repetitivo, y el segundo en modo manual (con las escalas adecuadas de tiempo) para el registro definitivo de la solución.

- - - - -

En cualquier caso, se desprende de lo anterior que en la fase de explotación de los resultados, es decir, cuando se deshacen los cambios de escala y cuando, con una regla se miden los valores de las curvas obtenidas y se restituyen las unidades de las magnitudes físicas que ham originado la simulación del problema, se pierde buena parte de la precisión con que pueden haberse ejecutado los cálculos.

- - - - -

Puede ocurrir que, a la vista de los gráficos obtenidos y/o considerando las posibles escalas del aparato de lectura, se imponga una reprogramación del problema, particularmente en lo que toda a los cambios de las escalas. Este es un procedimiento práctico por aproximaciones sucesivas, función del material disponible y de la propio experiencia.

- - - - -

8.3.- <u>FUNCIONAMIENTO LENTO Y FUNCIONAMIENTO RAPIDO (repetitivo)</u>

El funcionamiento manual, también llamado "lento", es el que ya conocemos a lo largo de las páginas anteriores.

La solución se obtiene en unos segundos o en pocos minutos, y el operador detiene la ejecución de los cálculos.

Todos los calculadores presentan además la posibilidad de funcionamiento "rápido" o pepetitivo: cuyo principio consiste en que se obtiene la solución (en cuestión de milisegundos. Pero no hay una solución) sino que esta misma se repite centenares de veces por segundo. La solución puede hacerse aparecer sobre la pantalla de un osciloscopio, por lo que el programador o el operador pueden variar algún parámetro de las ecuaciones y observar instantáneamente su repercusión en la imagen.

La repetición automática y rápida de los cálculos se provoca por medio de un tren de impulsos que conmutan, a una frecuencia escogida, el paso electrónico o por relés de la posición "restitución" a la posición "operación". El osciloscopio se sincroniza a esta frecuencia, con objeto de producir en el ojo la sensación de imagen persistente.

Los calculadores con funcionamiento repetitivo imponen elementos de computación de frecuencias más elevadas y excluyen el uso de elementos electromecánicos, como servomultiplicadores o resolutores.

- - - - -

8.4.- PRECISION

Se define la precisión de un calculador como la precisión de sus componentes. Para cada componente podría definirse la precisión como:

a) el menor nivel de tensión en porcentaje respecto de la escala total; Por ejemplo, una precisión de 0,01 % en un calculador de $\pm$ 100 v. significa que el menor nivel detectable por encima de los ruidos es de 20 mv.

b) el valor de la escala total dividido por la tensión más pequeña que se puede detectar. En el caso anterior: 200 v/20 mv. = 10^4 : 1

Ambas definiciones son equivalentes.

La precisión de los componentes no presupone nada sobre la precisión de la solución. La precisión o exactitud de la solución sería la diferencia entre la solución correcta (desconocida la mayoría de las veces) y la solución obtenida. Esta precisión dependerá, en primer lugar de la precisión de los componentes (nosotros hemos supuesto teóricamente elementos de características ideales, hipótesis ideal) y después, del problema en sí y de la programación. Por último, también depende de la precisión de los dispositivos de salida y de la interpretación humana de los resultados. Lo que puede asegurarse es que la precisión de los resultados no sobrepasará la precisión de los componentes.

Los calculadores oscilan entre márgenes de precisión de (1 % - 5 %) hasta (0,01 % - 0,1 %), por térmimo medio. El aumento de precisión se traduce inmediatamente en aumento de precio.

- - - - -

8.5.- EJEMPLO DE SIMULACION DE UN PROBLEMA FISICO

Este es un ejemplo clásico en muchos libros sobre calculadores analógicos; se incluye aquí porque permite una aproximación didáctica a esa cosa tan importante que se llama simulación. Simular un sistema físico consiste en sustituir el esquema construcción - experimentación por el de modelo matemático - análisis de su comportamiento. Tratándose de sistemas complejos la rentabilidad de este procedimiento es evidente. Piénsese en la simulación de un reactor nuclear; de determinadas características de un vuelo espacial o en la repetición de las distintas condiciones de vuelo para entrenamiento de un piloto en una cabina en tierra gobernada por un calculador y unos servos.

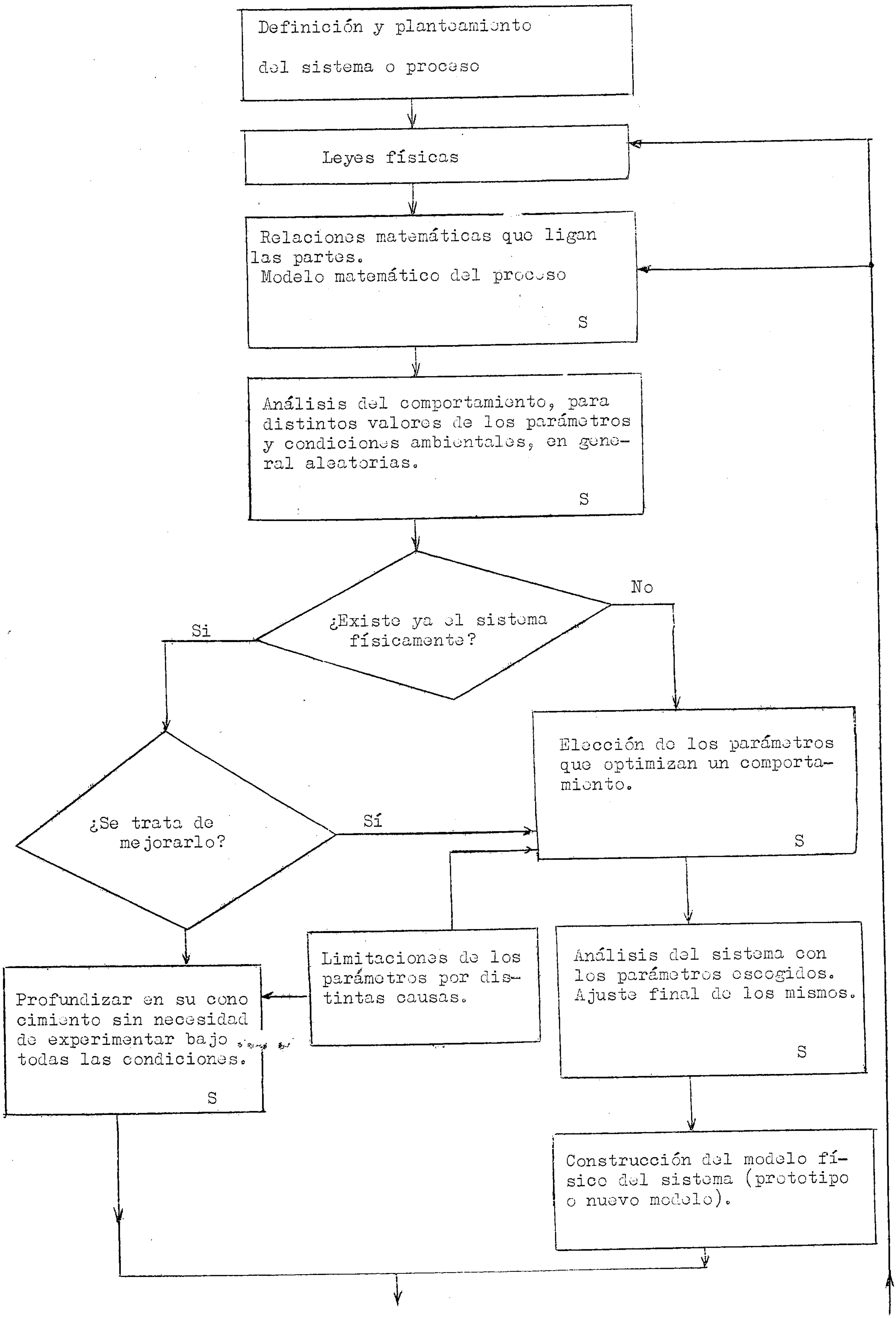
Puede decirse, sin temor a error, que el concepto de simulación va ligado de forma indisoluble al incremento galopante de complejidad de los sistemas y no resulta difícil predecir que las técnicas muy diversas de simulación(*) - asociadas por principio a los calculadores - constituirán, en breve, parte de la enseñanza en los centros superiores.

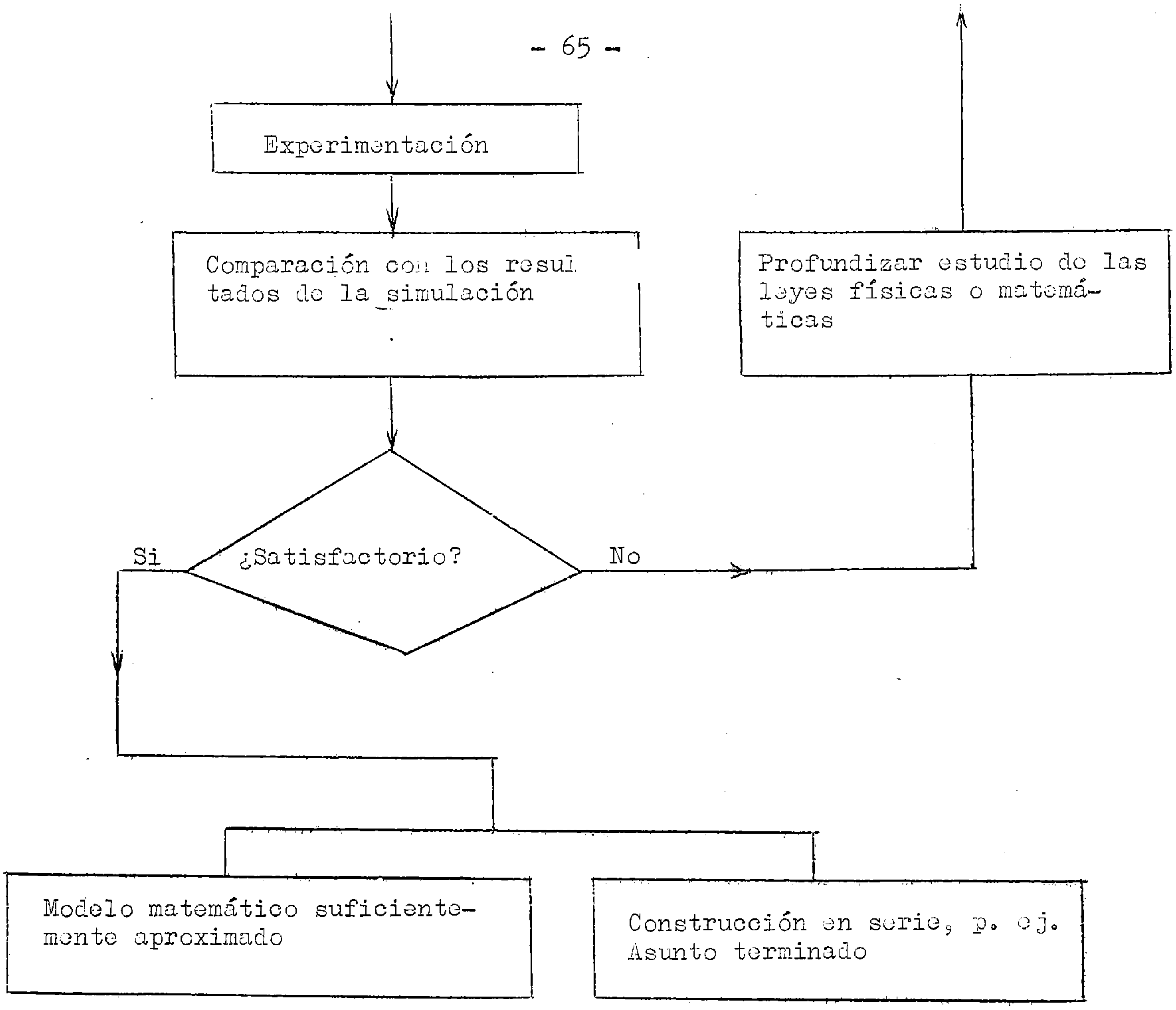
El diagrama de la fig. 43 expone la línea general del trabajo de puesta a punto de un sistema o proceso físico complejo.

La figura 44 representa esquemáticamente el equivalente a una suspensión clásica de automóvil. El objetivo es estudiar este sistema para determinar los valores de los resortes y amortiguadores que minimizan los desplazamientos.

( ) Existe una revista, de creación bastante reciente, centrada en estas técnicas.
"Simulation"
Editada por Simulation Councils, Inc.
La Jolla, California.

Nota: En el diagrama de la fig 43 el símbolo S, situado al borde de algunos bloques, significa "Simulación"


Definición y planteamiento
del sistema o proceso
Leyes físicas
Relaciones matemáticas que ligan las partes.
Modelo matemático del proceso
S
Análisis del comportamiento, para distintos valores de los parámetros y condiciones ambientales, en general aleatorias.
S
¿Existe ya el sistema físicamente?
No
Si
Elección de los parámetros que optimizan un comportamiento.
S
¿Se trata de mejorarlo?
Sí
Limitaciones de los parámetros por distintas causas.
Análisis del sistema con los parámetros escogidos. Ajuste final de los mismos.
S
Profundizar en su conocimiento sin necesidad de experimentar bajo todas las condiciones.
S
Construcción del modelo físico del sistema (prototipo o nuevo modelo).



-fig. 43-

de pasajero y chasis para calzadas de cualidades diferentes.

Las ecuaciones simplificadas del sistema son:

$$M_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + D_1 \frac{dx_1}{dt} + k_1 x_1 - D_1 \frac{dx_1}{dt} - k_1 x_4 = 0 \qquad (8.51)$$

$$M_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + D_2 \frac{dx_2}{dt} + k_2 x_2 - D_2 \frac{dx_4}{dt} - k_2 x_4 = F_2 \qquad (8.52)$$

$$M_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} + D_3 \frac{dx_3}{dt} + k_3 x_3 - D_3 \frac{dx_4}{dt} - k_3 x_4 = F_3 \qquad (8.53)$$

$$M_4 \frac{d^2 x_4}{dt^2} + (D_1 + D_2 + D_3) \frac{dx_4}{dt} + (k_1 + k_2 + k_3) x_4 - D_1 \frac{dx_1}{dt} - k_1 x_1 -$$

$$- D_2 \frac{dx_2}{dt} - k_2 x_2 - D_3 \frac{dx_3}{dt} - k_3 x_3 = 0 \qquad (8.54)$$

que tramsformamos en :

$$\ddot{x}_1 = -\frac{D_1}{M_1} \dot{x}_1 - \frac{k_1}{M_1} x_1 + \frac{D_1}{M_1} \dot{x}_4 + \frac{k_1}{M_1} x_4 \qquad (8.55)$$

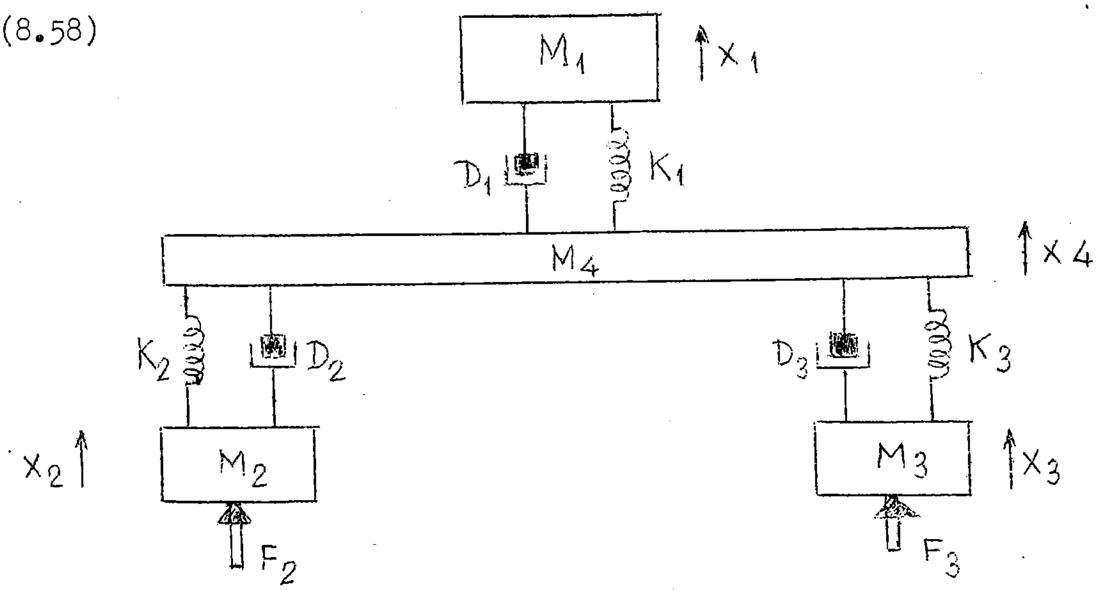
$$\ddot{x}_2 = -\frac{D_2}{M_2} \dot{x}_2 - \frac{k_2}{M_2} x_2 + \frac{D_2}{M_2} \dot{x}_4 + \frac{k_2}{M_2} x_4 + \frac{F_2}{M_2} \qquad (8.56)$$

$$\ddot{x}_3 = -\frac{D_3}{M_3}\dot{x}_3 - \frac{k_3}{M_3}x_3 + \frac{D_3}{M_3}\dot{x}_4 + \frac{k_3}{M_3}x_4 + \frac{F_3}{M_3} \qquad (8.57)$$

$$\ddot{x}_4 = -\frac{D_1 + D_2 + D_3}{M_4}\dot{x}_4 - \frac{k_1 + k_2 + k_3}{M_4}x_4 + \frac{D_1}{M_4}\dot{x}_1 + \frac{k_1}{M_4}x_1 + \frac{D_2}{M_4}\dot{x}_2 +$$

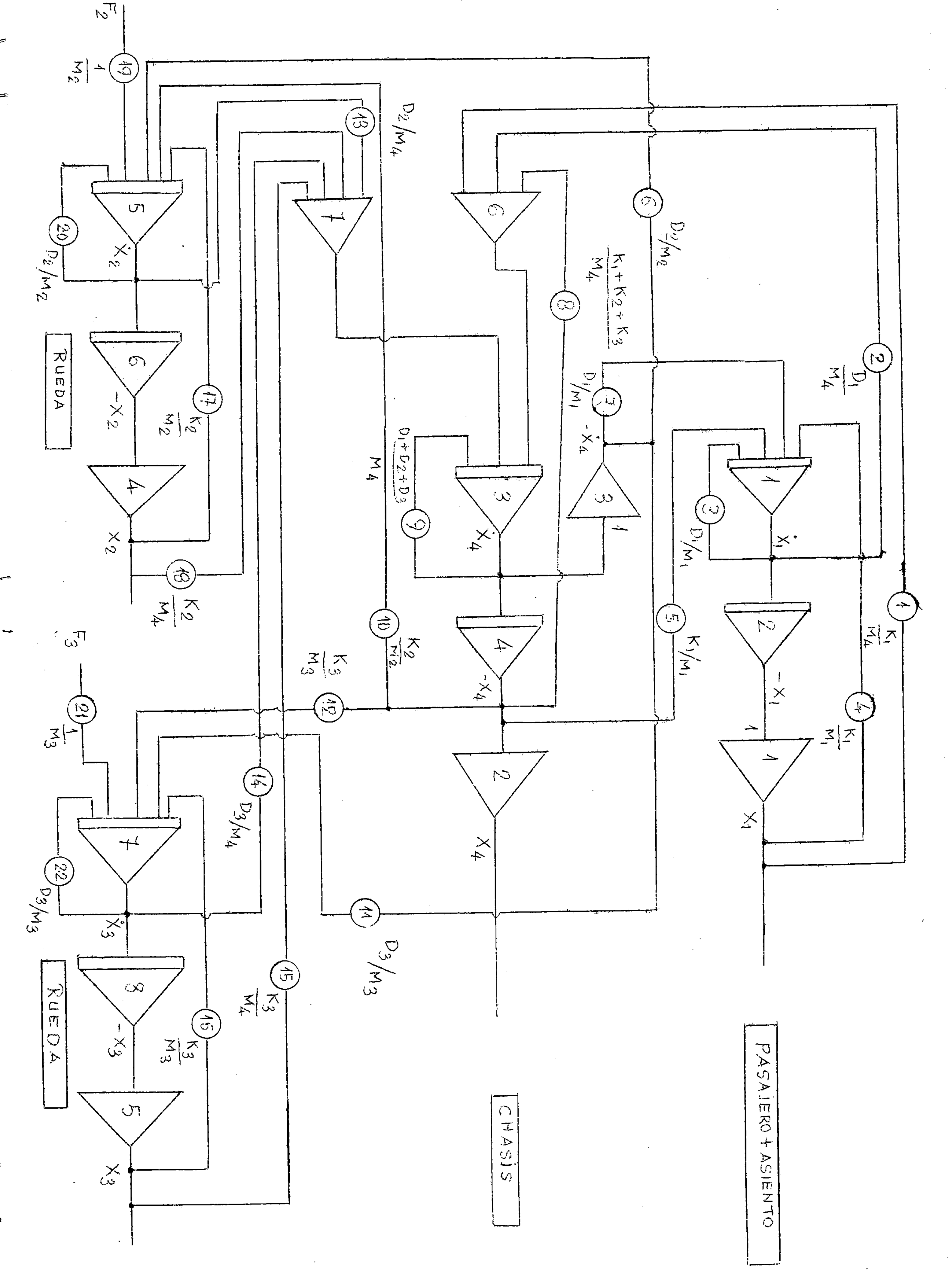
$$+ \frac{k_2}{M_4}x_2 + \frac{D_3}{M_4}\dot{x}_3 + \frac{k_3}{M_4}x_3 \qquad (8.58)$$

La ecuación (8.55) representa el movimiento del pasajero en su butaca; (8.56) y (8.57) los ejes de las ruedas delanteras y traseras y (8.58) el movimiento del chasis. Estas ecuaciones sólo pueden pprogramarse conociendo los valores numéricos de todos los parámetros, como ya sabemos. En el programa de la figura 45 hay que suponer, pues, implícitamente que los símbolos de los atenuadores simbolizan ahora todas las astucias de programación (coeficientes potenciómétricos, factores multiplicativos, cambios de escala) que sería necesario realizar para representar en cada caso concreto las relaciones (8.55) a (8.58)



M_1	masa de pasajero + butaca
M_2, M_3	masas de los ejes
M_4	masa del chasis
k_1	constante del resorte de la butaca
k_2, k_3	constantes de los resortes anterior y posterior
D_1	cte. de amortiguamiento de la butaca
D_2, D_3	ctes ,, ,, anterior y posterior(absorbentes)
F_2, F_3	fuerzas que el perfil de la calzada aplica sobre las ruedas.
x_1	desplazamiento vertical del pasajero
x_2, x_3	,,, de las ruedas
x_4	,, del chasis

-fig. 44-


RUEDA
RUEDA
CHASIS
PASAJERO + ASIENTO

El problema real podría plantearse en términos muy diversos pero a nuestros efectos supongamos que se trata de hallar los valores óptimos (dentro de ciertas limitaciones físicas y/o económicas) de D_2, k_2, D_3, k_3 para un cierto margen de valores de M_1 (masa del pasajero) y unos márgenes de perfiles de carretera, representados por funciones F de distinta amplitud y frecuencia que depende de la supuesta velocidad del vehículo, también considerada entre ciertos márgenes. (F_2 y F_3 puede representarse en primera aproximación por señales sinusoidales de frecuencia variable con la velocidad del automó - vil) En suma, vemos que se trata de variar los valores de parámetros y funciones entre:

$$\begin{array}{lll}
D_2' \longrightarrow & D_2 \longrightarrow & D_2'' \\
k_2' \longrightarrow & k_2 \longrightarrow & k_2'' \\
D_3' \longrightarrow & D_3 \longrightarrow & D_3'' \\
k_3' \longrightarrow & k_3 \longrightarrow & k_3'' \\
M_1' \longrightarrow & M_1 \longrightarrow & M_1'' \\
F_2' \longrightarrow & F_2 \longrightarrow & F_2'' \\
F_3' \longrightarrow & F_3 \longrightarrow & F_3''
\end{array}$$

hasta encontrar un juego (D_2, k_2, D_3, k_3) que minimice por ejemplo, las medias de $\dot{x}_1$ y $\dot{x}_4$ para todos los valores considerados de M_1 y F.

El programador tiene un gran trabajo por delante. Lo primero que puede hacer, quizá, es decidirse por un conjunto finito de valores dentro de cada uno de los márgenes tolerados más arriba. Esto le llevará a explorar lo que ocurre para todas las combinaciones posibles (D_2, k_2, D_3, k_3, M_1, F_2, F_3) Ahora bien, variar M_1 supone modificar los coeficientes 3,4,5, y 7; variar D_2 supone modificar 6,9,13 y 20; y así sucesivamente. Lo cual indica que el programador debe trazar un plan detallado e inteligente para ahorrar tiempo en las modificaciones de su programa. A lo largo del trabajo y de acuerdo con - ciertos resultados puede tomar la decisión de afinar en torno a ciertos valores de los parámetros o todo lo contrario. Dejémoslo aquí, porque ya es fácil de imaginarse una tarea rutinaria, de cambios de escala, de ajustes de los potenciómetros, con el correspondiente anejo de manipulación de los controles y comprobaciones. Todo ello implica una considerable inmovilización del tiempo útil de la máquina y explica las facilidades de que dotan los fabricantes a los calculadores analógicos modernos de gran tamaño (párrafos 8.13, 8.14 y 8.3 en particular). Un paso más y nos encontramos con los sistemas híbridos de cálculo.

- - - - -

8.6.- PREPARACION Y EJECUCION DE LOS PROBLEMAS EN EL CALCULADOR

El diagrama de la figura 46 muestra fundamentalmente que, dada la obligada presencia del operador, éste debe ser el propio programador o ingeniero que, conociendo el problema, sabe extraer el significado físico de las imágenes en el osciloscopio o de los registros sobre el papel e intervenir eficazmente en su resolución.

- - - - -

(Pasa a la página siguiente)

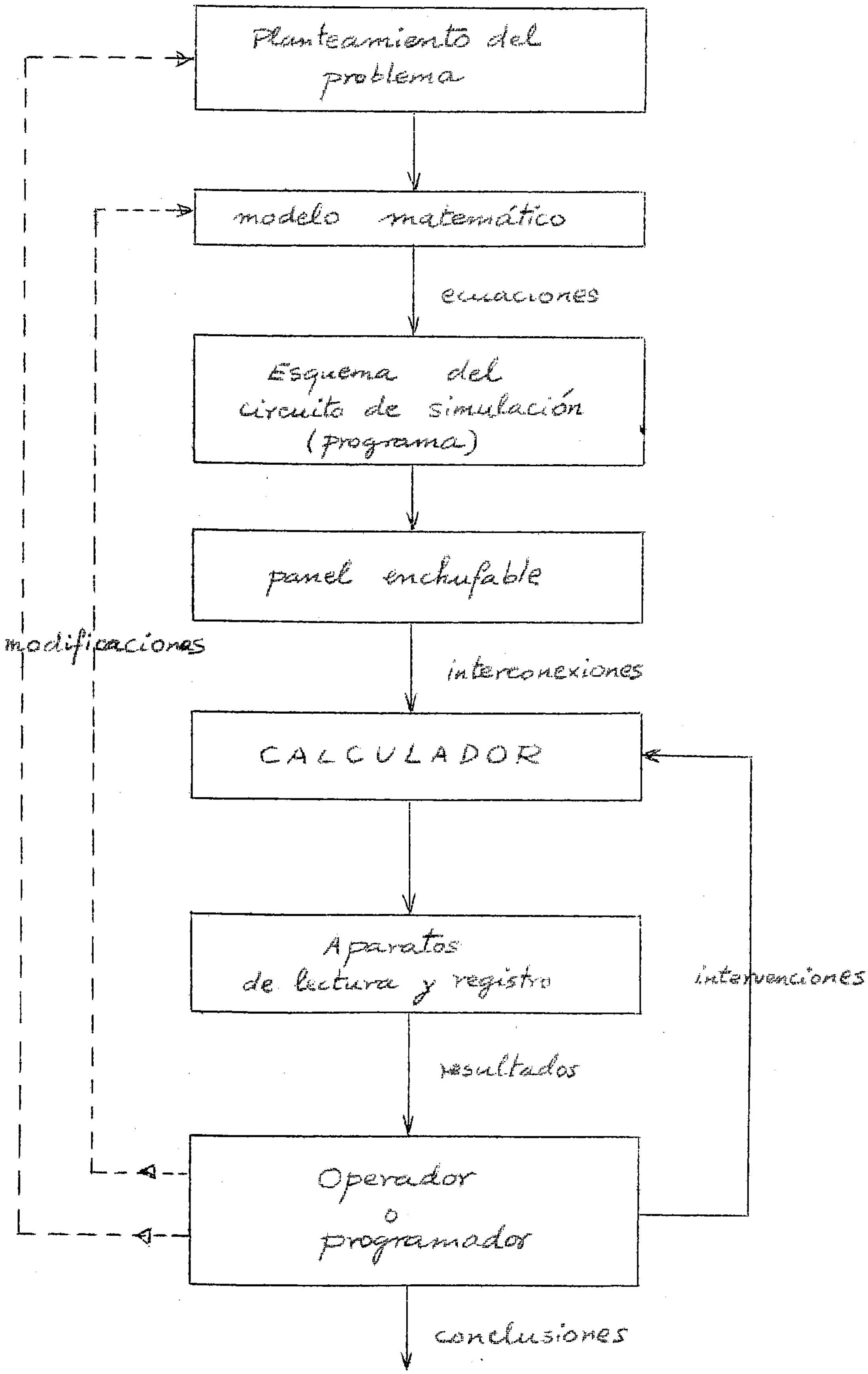

Planteamiento del problema
modelo matemático
ecuaciones
Esquema del circuito de simulación (programa)
panel enchufable
interconexiones
CALCULADOR
Aparatos de lectura y registro
resultados
Operador o programador
conclusiones
modificaciones
intervenciones

fig 46

9.SISTEMAS HIBRIDOS DE CALCULO

En este capítulo se reunen, resumen y comparan las característi - más importantes desde el punto de vista operacioneal de los calculadores analógicos y de los calculadores digitales.

Estas últimas páginas se justifican, en el ánimo del autor: 1º)Por el deseo de completar este panorama sencillo y breve de los calcula - dores analógicos, que, en forma creciente, vienen siendo dotados de elemen - tos lógicos para ayuda y control; 2º/ por la intención de ampliarm en un futuro y si las circunstancias lo permiten, estos apuntes;3º/ por la creencia, basada en una buena parte de evidencia, de que los sistemas de tratamiento - de la información tienden a configurarse progresivamente con un porcentaje - de material y/o de conceptos híbridos.

\- - - - -

9.1.- CALCULADORES ANALOGICOS

9.11.- VENTAJAS

1.-Trabajan con variables contínuas

2.- Operan en paralelo, es decir, todos los elementos de cálculo lo hacen simulatáneamente. La consecuencia más importante es que el orden - del sistema simulado no afecta al tiempo de cálculo.

3.- Operan con la misma rapidez para sistemas lineales y no lineales. Poseen muy alta velocidad y capacidad para operar en "tiempo real". La velocidad de operacióm está limitada solamente por el ancho de banda de los componentes.

4.- Las técnicas de programación son sencillas, ya que consisten en el manejo y conexión de símbolos de uso universal (integración, adición, multiplica - ción ...) con la ventaja adicional de servir de vehículo de comunicación - entre usuarios de todo el mundo.

5.- Vocación natural para la representación de sistemas dinámicos, por su facilidad en operar las integraciones.

6.- El utilizador puede observar directamente cambios en el comportamiento del proceso simulado mediante giro simple de los potenciómetros, lo que favorece a su trabajo de diseño.

7.- Los resultados se explotan en forma gráfica, fácilmente interpretables.

Los puntos 6 y 7 evidencian una aceptable comunicación entre el hombre y la máquina.

8.- Admiten la conexión en material externo para operar conjuntamente en "tiempo real".

- - - - -

9.12.- INCONVENIENTES

1. El cambio de escalas es cosa obligada, difícil de realizar en el caso de sistemas no lineales, y sobre todo operación difícil de realizar cuando no se posee un profundo conocimiento del proceso a simular. Se lleva a cabo por aproximaciones sucesivas y ésta es una labor monótona, pero fundamental, para la resolución correcta del problema y para la interpretación sensible de los resultados.

2. Precisión limitada por la de los componentes a un 0,01 % de la escala total en funcionamiento lento y a un 1 %, por ejemplo, en funcionamiento repetitivo.

3.- Capacidad de memoria prácticamente nula. Los valores de las variables pueden conservarse durante el tiempo que tardan en descargarse los voltajes capacitivos en los circuitos integradores.

4. Capacidad nula para tomar decisiones de tipo lógico y para manipular información no numérica.

- - - - -

9.2.- CALCULADORES DIGITALES

Tambien llamados calculadoras (o computadores-as) numéricos; aritméticos. También llamados máquinas o sistemas de proceso de datos. También llamados ordenadores electrónicos.

Como es sabido, estas máquinas trabajan sobre filas de datos p es tos en forma binaria. La unidad de cálculo ejecuta las siguientes posibles operaciones:

a) Adición o sustracción de dos números binarios

b) Comparación de dos nos. binarios

c) Transferencia de un nº binario a/de una memoria

A partir de este pequeño conjunto es posible manejar cualquier problema matemático, siempre que se cuente con la suficiente cantidad de conoci -

mientos para salvar este gran desnivel, y con la suficiente capacidad de memoria en la máquina y de tiempo de utilización de la misma.

- - - - -

9.21.- VENTAJAS

1. Precisión muy elevada, independiente de la calidad de los componentes del sistema, determinada por la técnica numérica empleada en la resolución del problema. (No hay que olvidar que cualquier operación compleja, tal como integración o diferenciación, se ha de realizar mediante técnicas aproximadas). Límite máximo impuesto por el número de bits de cada palabra o registro.

2. Operación en coma (o punto) flotante, lo que elimina toda necesidad de proceder a cambios de escala.

3. Capacidad para memorizar datos numéricos y no numéricos por un tiempo indefinido y en cantidad prácticamente ilimitada. Solo está limitada la capacidad de la memoria rápida.

4. Vocación natural para las operaciones de tipo lógico, lo mismo con datos numéricos que no numéricos.

- - - - -

9.22.- INCONVENIENTES

1. Operan secuencialmente (en serie). Es decir, en cada instante se está ejecutando una sola operación, por lo que el tiempo de cálculo crece muy rápidamente con la complejidad del problema. Un calculador digital resulta lento comparado con un analógico, a pesar de la fantástica velocidad de los circuitos lógicos del primero.

2. Las técnicas de programación, muy diversificadas, a menudo ligadas a una marca, a veces a un modelo dentro de cada marca y, por supuesto, al tipo de problema, suponen una barrera que separa al utilizador de la maquina. Fabricantes y universitario han realizado un gran esfuerzo para anular esta barrera creando lenguajes de programación de alto nivel como Fortran y Algol, para problemas científicos, y Cobol para problemas comerciales. Aún así, el utilizador no sabe como se desarrolla la ejecución de su problema dentro de la máquina y experimenta una sensación de impotencia y enajenación. Esto es lo que suele -

denominarse una "pobre comunicación hombre-máquina".

3. El ordenador se presenta aureolado como un fenómeno de nuestro tiempo y una nueva revolución industrial. En torno a él se barajan cifras astronómicas. La competencia en la venta de material y de servicios es feroz.

El ordenador tiene aplicación en todas las disciplinas científicas y humanas; es una herramienta poderosa, pero al tiempo un arma de dos filos. Exige de las personas que han de valerse de ella un entrenamiento especial, una nueva educación. Cuando no ocurre así, se sucumbe , por falta de criterio, como víctima propiciatoria de la batalla comercial. Esto lo consideramos un incoveniente, por esta razón se alinea aquí, ya que empuja a muchos a la elección de material poco adecuado para ún cierto tipo de problemas (en particular puede ser preferible un analógico frente a uno númerico) o a una mala utilización del mismo, aunque sea adecuado.

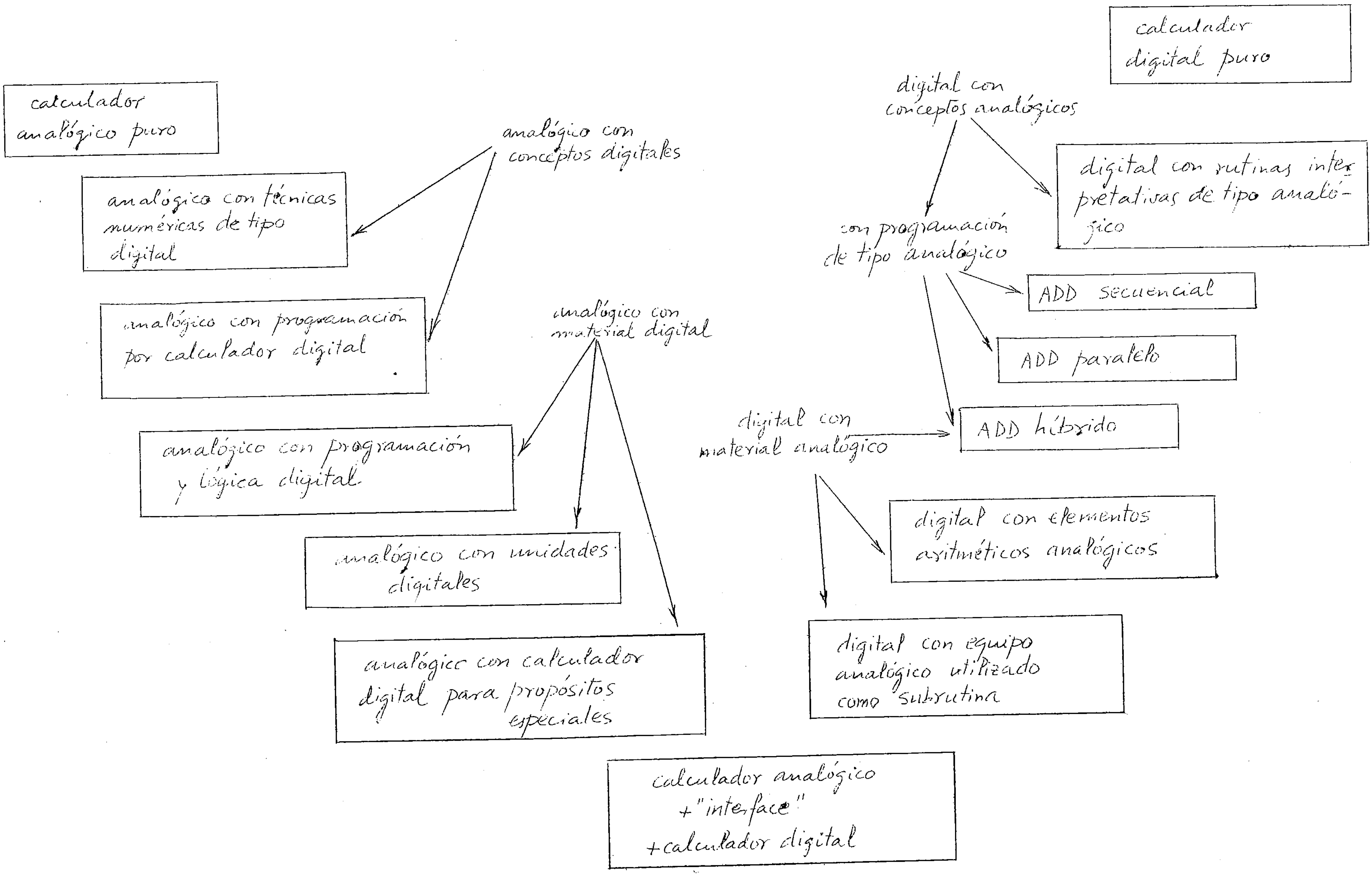
9.3.- SISTEMAS HIBRIDOS DE CALCULO

Comparadas ventajas e incovenientes de los calculadores analógicos y digitales, el deseo lógico es el de crear sistemas que reúnan las ventajas de ambos tipos, anulando sus incovenientes. En esta ocasión, además, se produce el hecho feliz de que los tipos de calculadores son en cierto modo complementarios; es decir, lo que en uno se presenta como incoveniente aparece en el otro como ventaja.

Ahora bien, no siempre es posible, ni tampoco deseable dadas circunstancias de tiempo, de costo, de complejidad de los problemas, el reunir "todas" las ventajas en un solo material. La evolución técnica, tecnológica y otras causas se han producido y se producen rápida, pero no instantáneamente, en el sentido de elaborar una gama convergente de equipos e ideas que van rellenando el hueco entre los dos extremos: por un lado, los calculadores analógicos; por otro, los calculadores aritméticos.

La figura 47 es un cuadro, tomado de Karplus ref [8], que ilustra el estado actual de las técnicas híbridas de cálculo.

Dada la gran confusión de ideas en este campo, se ha preferido generar en este capitulo la denominación de "sistemas híbridos de cálculo", en lugar de calculadores híbridos, para referirse a toda la gama de la figura 47. (ADD significa analizador diferencial digital, lo mismo que ADA significaría analizador diferencial analógico). (El cuadro 47 necesita comentarios aclaratorios en clase).


calculador analógico puro
analógico con conceptos digitales
analógico con técnicas numéricas de tipo digital
analógico con programación por calculador digital
analógico con material digital
analógico con programación y lógica digital
analógico con unidades digitales
analógico con calculador digital para propósitos especiales
calculador analógico + "interface" + calculador digital
calculador digital puro
digital con conceptos analógicos
digital con rutinas interpretativas de tipo analógico
con programación de tipo analógico
ADD secuencial
ADD paralelo
ADD híbrido
digital con material analógico
digital con elementos aritméticos analógicos
digital con equipo analógico utilizado como subrutina

REFERENCIAS

(1) Truitt y Rogers.

"Introduction au Calcul Analogique. Principes et applications".

Dunod 1964. Traducida de "Basic of Analog Computers".

(2) Korn y Korn.

"Electronic Analog and Hybrid Computers".

McGraw Hill 1964.

(3) Rogers y Connolly.

"Applications industrielles du Calcul analogique"

Dunod 1966

Traducida de "Analog Computation in Engineering Design"

(4) Machol

"System Engineering Design"

Capítulos 10 y 11

McGraw Hill 1965

(5) Levine

"Methods for Solving Engineering Problems using analog Computers"

McGraw Hill 1964

(6) Zulauf y Burnett

"Introductory Analog Computation with Graphic solutions"

McGraw Hill 1966

(7) Elgerd

"Control Systems Theory"

Capítulo 12

McGraw Hill 1967

(8) Karplus, Bekey, Wood, Merrit, Korn

"Hybrid Computation. Course notes"

University of California, Los Angeles. Junio 1968

(9) Grabbe, Ramo, Wooldridge

"Handbook of Automation, Computation and Control"

Volumen 2.

John Wiley, 2ª edición 1965.

(10) Truitt

"Hybrid Computation.... What is it?.... Who needs it...."

I.E.E.E. Spectrum. Junio 1964

(11) "Progress of analog - hybrid Computation"

EES series report nº12

The University of Arizona, 1966
